

CENGAGE Learning®
Precálculo
Matemáticas para el cálculo
Sexta edición | Edición revisada
Stewart • Redlin • Watson



SEXTA EDICIÓN

PRECÁLCULO

MATEMÁTICAS PARA EL CÁLCULO

EDICIÓN REVISADA

JAMES STEWART
McMASTER UNIVERSITY AND UNIVERSITY OF TORONTO

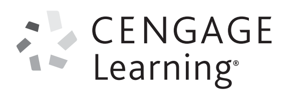
LOTHAR REDLIN
THE PENNSYLVANIA STATE UNIVERSITY

SALEEM WATSON
CALIFORNIA STATE UNIVERSITY, LONG BEACH

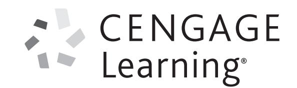
TRADUCCIÓN
ING. JORGE HUMBERTO ROMO MUÑOZ
TRADUCTOR PROFESIONAL

ADAPTADOR
DR. ERNESTO FILIO LÓPEZ
UNIDAD PROFESIONAL EN INGENIERÍA Y TECNOLOGÍAS AVANZADAS
INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL

REVISIÓN TÉCNICA
DRA. ILEANA BORJA TECUATL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE LA CIUDAD DE MÉXICO



Australia • Brasil • Corea • España • Estados Unidos • Japón • México • Reino Unido • Singapur



Precálculo. Matemáticas para el cálculo, sexta edición. Edición revisada.
James Stewart, Lothar Redlin y Saleem Watson

Director Editorial para Latinoamérica:
Ricardo H. Rodríguez

Editora de Adquisiciones para Latinoamérica:
Claudia C. Garay Castro

Gerente de Manufactura para Latinoamérica:
Antonio Mateos Martínez

Gerente Editorial de Contenidos en Español para Latinoamérica:
Pilar Hernández Santamarina

Gerente de Proyectos Especiales:
Luciana Rabuffetti

Coordinador de Manufactura:
Rafael Pérez González

Editora:
Abril Vega Orozco

Diseño de portada:
Anneli Daniela Torres Arroyo

Imagen de portada:
©Fabio Bernardi / Shutterstock

Composición tipográfica:
Humberto Núñez Ramos

Traducido del libro
Precalculus. Mathematics for Calculus. Sixth Edition.
Stewart, James, Lothar Redlin y Saleem Watson.
Publicado en inglés por Brooks & Cole, una compañía de Cengage Learning ©2012
ISBN: 978-0-8400-6807-1

Adaptado del libro *Precálculo. Matemáticas para el cálculo. Sexta edición*. Stewart, James, Lothar Redlin y Saleem Watson.
Una compañía de Cengage Learning ©2012.
ISBN: 978-607-481-777-5

Datos para catalogación bibliográfica:
Stewart, James. Lothar Redlin y Saleem Watson.
Precálculo. Matemáticas para el cálculo, sexta edición.
Edición revisada.
ISBN: 978-607-526-288-8

Visite nuestro sitio en:
http://latinoamerica.cengage.com

Impreso en México
1 2 3 4 5 6 7 19 18 17 16

ACERCA DE LOS AUTORES

JAMES STEWART recibió la maestría de la Universidad de Stanford y el doctorado de la Universidad de Toronto. Realizó una investigación en la Universidad de Londres y fue influenciado por el famoso matemático George Polya en la Universidad de Stanford. Stewart es profesor emérito de la Universidad McMaster y actualmente es profesor de Matemáticas en la Universidad de Toronto. Su campo de investigación es el análisis armónico y las conexiones entre las matemáticas y la música. James Stewart es el autor de una exitosa serie de libros de texto para cálculo publicada por Brooks/Cole, Cengage Learning, incluyendo *Cálculo, Cálculo: trascendentes tempranas*, y *Cálculo: conceptos y contextos*; una serie de textos de precálculo, y una serie de libros de texto de matemáticas para secundaria.

LOTHAR REDLIN creció en la isla de Vancouver, recibió una licenciatura en Ciencias de la Universidad de Victoria, y recibió un doctorado de la Universidad de McMaster en 1978. Posteriormente se dedicó a la investigación y docencia en la Universidad de Washington, la Universidad de Waterloo y la Universidad Estatal de California en Long Beach. En la actualidad es profesor de Matemáticas en la Universidad Estatal de Pennsylvania, en el Campus de Abington. Su campo de investigación es la topología.

SALEEM WATSON estudió la licenciatura en Ciencias de la Universidad Andrews, en Michigan. Realizó estudios de posgrado en la Universidad de Dalhousie y la Universidad de McMaster, donde recibió su doctorado en 1978. Posteriormente se dedicó a la investigación en el Instituto de Matemáticas de la Universidad de Varsovia en Polonia. También enseñó en la Universidad Estatal de Pennsylvania. Actualmente es profesor de Matemáticas en la Universidad Estatal de California, Long Beach. Su campo de investigación es el análisis funcional.

Stewart, Redlin y Watson también han publicado *College Algebra, Trigonometry*, *Algebra and Trigonometry*, y (con Phyllis Panman) *College Algebra*: *Concepts and contexts.*

La obra cuenta con material adicional en línea. Ingrese a www.cengage.com y busque el libro por el ISBN.

CONTENIDO

El siguiente material se encuentra disponible en línea. Ingrese a www.cengage.com y busque el libro por el ISBN.

PRÓLOGO PRINCIPIOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

GEORGE POLYA (1887-1985) es famoso entre los matemáticos por sus ideas sobre resolución de problemas. Sus conferencias sobre este tema en la Universidad de Stanford atraían a multitudes a las cuales él llevó al borde de sus asientos, conduciéndolos a descubrir las soluciones por sí mismos. Él era capaz de hacer esto debido a su profundo conocimiento de la psicología de la resolución de problemas. Su conocido libro *How to solve it* ha sido traducido a 15 idiomas. Dijo que Euler (véase la página 292) fue el único grande entre los matemáticos, porque explicó cómo encontraba sus resultados. Polya dice a menudo a sus alumnos y colegas: "Sí, veo que la demostración es correcta, pero ¿cómo lo descubrió?" En el prefacio de *How to solve it*, Pólya escribe: "Un gran descubrimiento resuelve un gran problema, pero es un grano de descubrimiento en la solución de cualquier problema. Usted puede ser modesto, pero si desafía su curiosidad y pone en juego sus facultades inventivas, y si lo resuelve por sus propios medios, puede experimentar la tensión y disfrutar el triunfo del descubrimiento".

La capacidad para resolver problemas es una habilidad muy apreciada en muchos aspectos de la vida. Sin duda, es una parte importante de cualquier curso de matemáticas. No existen reglas rígidas ni de aplicación inmediata que aseguren el éxito en la solución de problemas. Sin embargo, en este prólogo se propone una estrategia general que, regularmente, se sigue y que puede verse como componente de un proceso útil para resolver problemas de Precálculo. Este proceso explicita el sentido común y se apoya en el texto de George Pólya, *How To Solve It*.

1. Entender el problema

Lea el problema con sumo cuidado y asegúrese de entenderlo. Hágase las siguientes preguntas relacionadas con el problema que desea resolver:

¿Qué se desconoce?
Qué cantidades se conocen?
¿Cuáles son las condiciones dadas?

Para muchos problemas, es útil

dibujar un diagrama

e identificar las cantidades, tanto conocidas como desconocidas, dentro del diagrama. Por lo general, es necesario

Proponer una notación adecuada

en la elección de los símbolos para las cantidades desconocidas. A menudo se usan las letras a, b, c, m, n, x, y, aunque en algunos casos, ayuda utilizar las iniciales como símbolos sugerentes, por ejemplo, V para el volumen o t para el tiempo.

2. Piense en un plan

Encuentre una conexión entre la información dada y la desconocida que le permita calcular la cantidad desconocida (incógnita). A menudo es útil preguntarse: ¿Cómo puedo relacionar lo conocido y lo desconocido? Si no puede ver una conexión inmediata, pueden ser útiles las siguientes sugerencias:

▶ Trate de reconocer algo familiar

Relacione la situación dada con los conocimientos previos. Observe la incógnita y trate de recordar un problema que haya resuelto antes, que tenga características parecidas a lo que busca.

▶ Trate de reconocer patrones

Ciertos problemas se resuelven mediante el reconocimiento de algún tipo de patrón o conducta repetitiva. El patrón puede ser geométrico, numérico o algebraico. Si puede percatarse de la regularidad o repetición conductual en un problema, entonces será capaz de adivinar cuál es el patrón y ensayarlo.

▶ Use analogías

Trate de pensar en un problema análogo, un problema similar o relacionado, que tenga un nivel de dificultad más bajo. Si puede resolver el problema similar, más simple, entonces le puede dar pistas para resolver un problema más difícil. Por ejemplo, si un problema implica un número muy grande, puede intentar resolver un problema similar con un número menor. Si el problema está en tres dimensiones, puede empezar el análisis con uno de dos dimensiones. Si el problema a resolver es de carácter general, puede empezar por un caso particular.

▶ Introduzca algo adicional

A veces es necesario introducir algo nuevo, una ayuda extra, para hacer la conexión entre lo conocido y lo desconocido. Por ejemplo, en un problema para el cual un diagrama es útil, la ayuda podría ser una nueva línea dibujada en el diagrama. En un problema más algebraico la ayuda podría ser una nueva incógnita que se relaciona con la incógnita original.

▶ Tome casos

A veces puede tener que dividir un problema en varios casos y dar un argumento diferente para cada caso. Por ejemplo, a menudo tenemos que utilizar esta estrategia frente a problemas que involucran un valor absoluto.

▶ Trabaje hacia atrás

A veces es útil suponer que su problema está resuelto y trabajar paso a paso con la expresión final para transformarla en la original, hasta llegar a los datos proporcionados. Revertir los pasos le permitiría construir la solución buscada. Este procedimiento se utiliza comúnmente en la resolución de ecuaciones. Por ejemplo, para resolver $3x - 5 = 7$, suponga que x es un número que satisface $3x - 5 = 7$ y trabaje hacia atrás. Sume 5 a cada lado de la ecuación y luego divida ambos lados entre 3 para obtener $x = 4$. Como cada uno de estos pasos se puede revertir, ha resuelto el problema.

▶ Establezca metas secundarias

En un problema complejo a menudo es útil establecer objetivos parciales (en los que la situación deseada se cumple solo parcialmente). Si usted puede lograr o alcanzar estos objetivos parciales, entonces será capaz de usarlos como base para alcanzar su meta final.

▶ Razonamiento indirecto

A veces es apropiado atacar un problema indirectamente. Al utilizar la técnica de demostración por contradicción, para demostrar que P implica Q, se supone que P es cierta y Q, falsa. Se trata de ver por qué esto no es posible. De alguna manera tenemos que utilizar esta información y llegar a una contradicción de lo que tenemos como verdad.

3. Lleve a cabo el plan

En el paso 2, se ideó un plan. Para llevarlo a cabo, debe comprobar cada etapa del plan y escribir los detalles que aseguren que cada etapa es la correcta.

4. Mire hacia atrás

Después de completar la solución, conviene mirar hacia atrás, en parte para ver si se han cometido errores y en parte para ver si hay formas alternas más eficientes para resolver el problema. Mirar hacia atrás también le ayudará a familiarizarse con el método de solución, y usarlo como apoyo en la solución de problemas similares en el futuro. Descartes dijo: *Cada problema que resolví se convirtió en una regla que sirvió después para resolver otros problemas*.

En el siguiente ejemplo se intenta ilustrar el uso de estos principios para la resolución de problemas:

PROBLEMA | Rapidez promedio

Una conductora inicia un viaje. Durante la primera mitad de la distancia que ha de recorrer, mantiene una rapidez de 30 km/h; durante la segunda mitad, una rapidez de 60 km/h. ¿Cuál es su rapidez promedio a lo largo de este viaje?

PIENSE EN EL PROBLEMA

El primer impulso es tomar el promedio de la rapidez durante todo el viaje

$$\frac{30 \text{ km} + 60 \text{ km}}{2} = 45 \text{ km/h}$$

¿Esto es realmente correcto?

Intente un caso particular ▶

Veamos un caso fácil de considerar. Supongamos que la distancia total recorrida es de 120 km. Los primeros 60 km se recorren a 30 km/h, lo que tarda 2 horas. Los siguientes 60 km se recorren a 60 km/h, lo que tarda una hora. Así el tiempo total es de horas por lo que la rapidez promedio es

$$\frac{120}{3} = 40 \text{ km/h}$$

Por lo que nuestra primera estimación está equivocada.

SOLUCIÓN

Comprenda el problema ▶

Hay que reflexionar el significado de rapidez promedio. La cual se define como

$$\text{rapidez promedio} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}}$$

Introduzca una notación adecuada ▶

Identifique la información dada ▶

Sea d la distancia recorrida en cada parte del viaje. Sean t_1 y t_2 el tiempo tomado para la primera y segunda mitad del viaje, respectivamente. Ahora podemos escribir la información que se nos ha dado. Para la primera mitad del viaje se tiene

$$30 = \frac{d}{t_1}$$

y para la segunda mitad

$$60 = \frac{d}{t_2}$$

Identifique la incógnita ▶

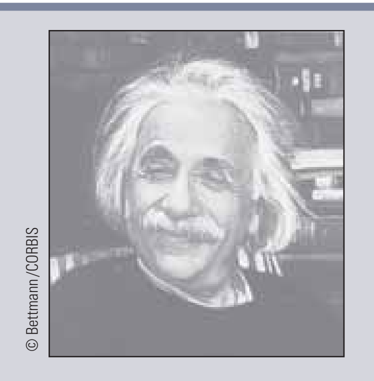
Ahora podemos identificar la cantidad que hay que encontrar:

$$\text{rapidez promedio durante todo el recorrido} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo total transcurrido}} = \frac{2d}{t_1 + t_2}$$

Relacione la información proporcionada con la incógnita ▶

Para calcular esta cantidad, necesitamos conocer t_1 y t_2, así que hay que resolver las ecuaciones anteriores en términos del tiempo:

$$t_1 = \frac{d}{30} \quad \text{y} \quad t_2 = \frac{d}{60}$$



No se sienta mal si usted no puede resolver estos problemas de inmediato. Los problemas 1 y 4 fueron enviados a Albert Einstein por su amigo Wertheimer. Einstein (y su amigo Bucky) disfrutaba de los problemas y le escribió a Wertheimer. Esta es parte de su respuesta:

> Su carta nos dio un montón de pruebas divertidas. La primera prueba de inteligencia nos ha engañado a ambos (a Bucky y a mí). ¡Solo cuando la trabajé con dedicación me di cuenta de que no se dispone de tiempo para la trayectoria descendente! Bucky también fue engañado en el segundo ejemplo, pero yo no. ¡Curiosidades como esta nos muestran lo tontos que somos!

(Véase *Mathematical Intelligencer*, Primavera de 1990, página 41.)

Ya se tienen los ingredientes necesarios para calcular la cantidad buscada:

$$\text{rapidez promedio} = \frac{2d}{t_1 + t_1} = \frac{2d}{\dfrac{d}{30} + \dfrac{d}{60}}$$

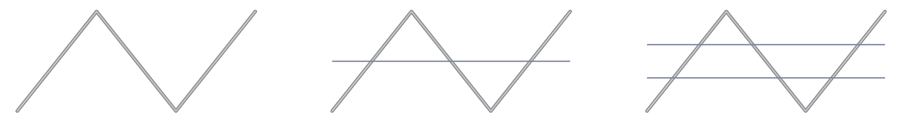
$$= \frac{60(2d)}{60\left(\dfrac{d}{30} + \dfrac{d}{60}\right)} \qquad \text{Multiplique el numerador y el denominador por 60}$$

$$= \frac{120d}{2d + d} = \frac{120d}{3d} = 40$$

Por lo tanto, la rapidez promedio durante todo el recorrido es 40 km/h. ■

PROBLEMAS

1. **Distancia, tiempo y velocidad** Un viejo automóvil tiene que recorrer un camino de 2 km, cuesta arriba y cuesta abajo. Debido a que es muy antiguo, el automóvil puede subir el primer kilómetro, a no más de una rapidez media de 15 km/h. ¿Qué tan rápido tiene que ir el automóvil el segundo kilómetro (en el descenso podría ir más rápido, por supuesto), para alcanzar una rapidez media de 30 km/h durante el viaje?
2. **Comparando descuentos** ¿Cuál precio es mejor para el comprador, un descuento del 40% o dos descuentos sucesivos del 20%?
3. **Cortar un alambre** Se dobla un pedazo de alambre, como se muestra en la figura. Puede verse que un corte del alambre produce cuatro piezas y dos cortes paralelos producen siete piezas. ¿Cuántas piezas se produjeron por 142 cortes paralelos? Escriba una fórmula para el número de piezas producidas por n cortes paralelos.



4. **Propagación de amibas** Una amiba se reproduce por división simple, cada división toma 3 minutos para completarse. Cuando esa amiba se pone en un recipiente de vidrio con un fluido nutriente, el recipiente se llena de amibas en una hora. ¿Cuánto tiempo haría falta para que el contenedor se llenara si en lugar de comenzar con una amiba, comenzamos con dos?
5. **Promedio de bateo** El jugador A tiene un promedio de bateo más alto que el jugador B para la primera mitad de la temporada de béisbol. El jugador A también tiene un promedio de bateo más alto que el jugador B para la segunda mitad de la temporada. ¿Es necesariamente cierto que el jugador A tiene un promedio de bateo más alto que el jugador B para toda la temporada?
6. **Café y crema** Se toma una cucharada de crema de una jarra y se coloca en una taza de café. El café se agita. A continuación, una cucharada de esta mezcla se pone en la jarra de crema. ¿Hay ahora más crema en la taza de café o más café en la jarra de crema?
7. **Envolviendo el mundo** Una cinta se amarra fuertemente alrededor de la Tierra en el ecuador. ¿Cuánta cinta adicional se necesita si usted la separa 1 pie del ecuador en todos sus puntos? (No es necesario conocer el radio de la Tierra para resolver este problema.)



8. **Para terminar donde empezó** Una mujer parte de un punto P sobre la superficie de la Tierra y camina 1 milla al sur, luego 1 milla al este para después moverse una milla al norte y finalmente regresar al punto de partida P . Describa todos los puntos P para los cuales esto es posible. [*Sugerencia*: Hay una infinidad de esos puntos, todos los cuales, menos uno, se encuentran en la Antártida.]

Muchos problemas más y ejemplos que ponen de relieve diferentes principios de resolución de problemas están disponibles en el sitio web: **www.stewartmath.com***. Usted puede intentarlos a medida que avanza en el libro.

*Este material se encuentra disponible en inglés.



CAPÍTULO 1

FUNDAMENTOS

En este primer capítulo repasamos los números reales, ecuaciones y el plano coordenado. Es probable que el lector ya se encuentre familiarizado con estos conceptos, pero es útil ver de nuevo cómo funcionan estas ideas para resolver problemas y modelar (o describir) situaciones prácticas, que además sirven de apoyo a futuros cursos de Cálculo.

Veamos la forma en que todas estas ideas se usan en una situación real: suponga que a usted le pagan $9 por hora en su trabajo de tiempo parcial. Podemos *modelar* su paga y por trabajar x horas mediante la ecuación $y = 9x$. Para averiguar cuántas horas necesita trabajar para que le paguen 200 dólares, resolvemos la ecuación $200 = 9x$. Graficar la ecuación $y = 9x$ en un *plano coordenado* nos ayuda a "ver" cómo aumenta la paga con las horas trabajadas.

1.1 Números reales

Propiedades de los números reales ▶ Adición y sustracción ▶ Multiplicación y división ▶ La recta real ▶ Conjuntos e intervalos ▶ Valor absoluto y distancia

Repasemos los tipos de números que conforman el sistema de números reales. Empecemos con los **números naturales:**

$$1, 2, 3, 4, \ldots$$

Los diferentes tipos de números reales fueron inventados para satisfacer necesidades específicas. Por ejemplo, los números naturales se necesitan para contar, los números negativos para describir una deuda o temperaturas bajo cero, los números racionales para conceptos como "medio galón de leche", y números irracionales para medir ciertas magnitudes, como la diagonal de un cuadrado.

Los **enteros** constan de los números naturales junto con sus negativos y 0:

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

Construimos los **números racionales** al tomar razones entre enteros. Entonces, cualquier número racional r puede expresarse como

$$r = \frac{m}{n}$$

donde m y n son enteros y $n \neq 0$. Como ejemplos, tenemos

$$\tfrac{1}{2} \qquad -\tfrac{3}{7} \qquad 46 = \tfrac{46}{1} \qquad 0.17 = \tfrac{17}{100}$$

(Recuerde que la división entre 0 siempre se excluye, de modo que expresiones como $\frac{3}{0}$ y $\frac{0}{0}$ no están definidas.) También hay números reales, tales como $\sqrt{2}$, que no se pueden expresar como una razón entre enteros, y se denominan **números irracionales.** Se puede demostrar, con diferentes grados de dificultad, que los siguientes números también son irracionales:

$$\sqrt{3} \qquad \sqrt{5} \qquad \sqrt[3]{2} \qquad \pi \qquad \frac{3}{\pi^2}$$

Por lo general el conjunto de todos los números reales se denota con el símbolo $\mathbb{R}$. Cuando usamos la palabra *número* sin más detalle, queremos decir "número real". La Figura 1 es un diagrama de los tipos de números reales con los que trabajamos en este libro.

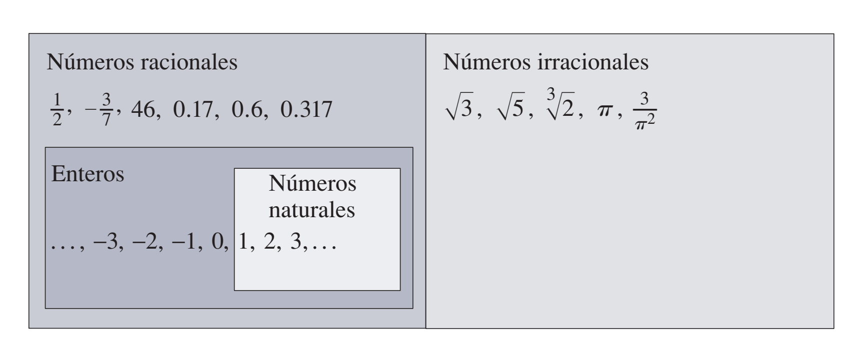


FIGURA 1 Subconjuntos de los números reales y algunos ejemplos de sus elementos

Un número decimal periódico como

$$x = 3.5474747\ldots$$

es un número racional. Para convertirlo a una razón de dos enteros, escribimos

$$\begin{aligned} 1000x &= 3547.47474747\ldots \\ -10x &= -35.47474747\ldots \\ \hline 990x &= 3512.0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $x = \frac{3512}{990}$. La idea es multiplicar x por las potencias apropiadas de 10 y luego restar para eliminar la parte periódica.

Todo número real tiene una representación decimal. Si el número es racional, entonces su parte decimal es periódica.

$$\tfrac{1}{2} = 0.5000\ldots = 0.5\overline{0} \qquad \tfrac{2}{3} = 0.66666\ldots = 0.\overline{6} \qquad 5 = 5.000... = 5.0$$

$$\tfrac{157}{495} = 0.3171717\ldots = 0.3\overline{17} \qquad \tfrac{9}{7} = 1.285714285714\ldots = 1.\overline{285714}$$

(La barra indica que la sucesión de dígitos se repite por siempre). Si el número es irracional, la representación decimal no es periódica.

$$\sqrt{2} = 1.414213562373095\ldots \qquad \pi = 3.141592653589793\ldots$$

Si detenemos la expansión decimal de cualquier número en cierto lugar, obtenemos una aproximación al número. Por ejemplo, podemos escribir

$$\pi \approx 3.14159265$$

donde el símbolo ≈ se lee "es aproximadamente igual a". Cuantos más lugares decimales retengamos, mejor es nuestra aproximación.

▼ Propiedades de los números reales

Todos sabemos que $2 + 3 = 3 + 2$, y $5 + 7 = 7 + 5$, y $513 + 87 = 87 + 513$, etc. En álgebra, expresamos todos estos hechos (un infinito de ellos) si escribimos

$$a + b = b + a$$

donde a y b son dos números cualquiera. En otras palabras, "$a + b = b + a$" es una forma concisa de decir que "cuando sumamos dos números, el orden de adición no importa". Este hecho se conoce como *Propiedad Conmutativa* de la adición. De nuestra experiencia con números sabemos que las siguientes propiedades también son válidas.

PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS REALES

Propiedades	Ejemplo	Descripción
Conmutativas		
$a + b = b + a$	$7 + 3 = 3 + 7$	Cuando sumamos dos números, el orden no importa.
$ab = ba$	$3 \cdot 5 = 5 \cdot 3$	Cuando multiplicamos dos números, el orden no importa.
Asociativas		
$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(2 + 4) + 7 = 2 + (4 + 7)$	Cuando sumamos tres números, no importa cuáles dos de ellos sumamos primero.
$(ab)c = a(bc)$	$(3 \cdot 7) \cdot 5 = 3 \cdot (7 \cdot 5)$	Cuando multiplicamos tres números, no importa cuáles dos de ellos multiplicamos primero.
Distributivas		
$a(b + c) = ab + ac$ $(b + c)a = ab + ac$	$2 \cdot (3 + 5) = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$ $(3 + 5) \cdot 2 = 2 \cdot 3 + 2 \cdot 5$	Cuando multiplicamos un número por una suma de dos números, obtenemos el mismo resultado si multiplicamos el número por cada uno de los términos y luego sumamos los resultados.

La Propiedad Distributiva aplica siempre que multiplicamos un número por una suma. La Figura 2 explica por qué funciona esta propiedad para el caso en el que todos los números sean enteros positivos, pero la propiedad es verdadera para cualesquier números reales a, b y c.

La Propiedad Distributiva es de importancia crucial porque describe la forma en que la adición y la multiplicación interactúan una con otra.

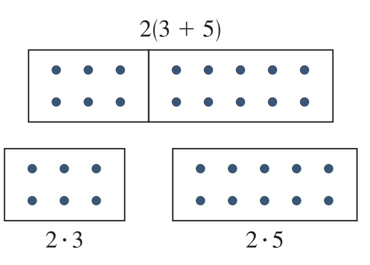


FIGURA 2 La Propiedad Distributiva

EJEMPLO 1 | Uso de la Propiedad Distributiva

(a) $2(x + 3) = 2 \cdot x + 2 \cdot 3$ — Propiedad Distributiva

$= 2x + 6$ — Simplifique

(b) $(a + b)(x + y) = (a + b)x + (a + b)y$ — Propiedad Distributiva

$= (ax + bx) + (ay + by)$ — Propiedad Distributiva

$= ax + bx + ay + by$ — Propiedad Asociativa de la Adición

En el último paso eliminamos el paréntesis porque, de acuerdo con la Propiedad Asociativa, no importa el orden de la adición.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **11**

Adición y sustracción

No suponga que $-a$ es un número negativo. Que $-a$ sea negativo o positivo depende del valor de a. Por ejemplo, si $a = 5$, entonces $-a = -5$, un número negativo, pero si $a = -5$, entonces $-a = -1(-5) = 5$ (Propiedad 1), un número positivo.

El número 0 es especial para la adición; recibe el nombre de **identidad aditiva** porque $a + 0 = a$ para cualquier número real a. Todo número real a tiene un inverso aditivo o **negativo**, $-a$, que satisface $a + (-a) = 0$. La **sustracción** es la operación que deshace a la adición; para sustraer un número de otro, simplemente sumamos el negativo de ese número. Por definición

$$a - b = a + (-b)$$

Para operar números reales con números negativos, usamos las siguientes propiedades.

PROPIEDADES DE NEGATIVOS

Propiedad	Ejemplo
1. $(-1)a = -a$	$(-1)5 = -5$
2. $-(-a) = a$	$-(-5) = 5$
3. $(-a)b = a(-b) = -(ab)$	$(-5)7 = 5(-7) = -(5 \cdot 7)$
4. $(-a)(-b) = ab$	$(-4)(-3) = 4 \cdot 3$
5. $-(a + b) = -a - b$	$-(3 + 5) = -3 - 5$
6. $-(a - b) = b - a$	$-(5 - 8) = 8 - 5$

La Propiedad 6 expresa el hecho intuitivo de que $a - b$ y $b - a$ son negativos uno del otro. La Propiedad 5 se usa a veces con más de dos términos:

$$-(a + b + c) = -a - b - c$$

EJEMPLO 2 | Uso de las propiedades de los negativos

Sean x, y y z números reales.

(a) $-(x + 2) = -x - 2$ — Propiedad 5: $-(a + b) = -a - b$

(b) $-(x + y - z) = -x - y - (-z)$ — Propiedad 5: $-(a + b) = -a - b$

$= -x - y + z$ — Propiedad 2: $-(-a) = a$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **23**

▼ Multiplicación y división

El número 1 es especial para la multiplicación; recibe el nombre de **identidad multiplicativa** porque $a \cdot 1 = a$ para cualquier número real a. Todo número real a diferente de cero tiene un inverso multiplicativo o **recíproco**, $1/a$, que satisface $a \cdot (1/a) = 1$. La **división** es la operación que deshace la multiplicación; para dividir entre un número, multiplicamos por el recíproco de ese número. Si $b \neq 0$, entonces, por definición,

$$a \div b = a \cdot \frac{1}{b}$$

Escribimos $a \cdot (1/b)$ simplemente como a/b. Nos referimos a a/b como el **cociente** de a y b o como la **fracción** a sobre b; a es el **numerador** y b es el **denominador** (o **divisor**). Para combinar números reales usando la operación de división, usamos las siguientes propiedades.

PROPIEDADES DE LAS FRACCIONES

Propiedad	Ejemplo	Descripción
1. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7} = \frac{10}{21}$	Al **multiplicar fracciones**, se multiplican numeradores y denominadores por separado.
2. $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$	$\frac{2}{3} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$	Al **dividir fracciones** se multiplica por el recíproco del divisor.
3. $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$	$\frac{2}{5} + \frac{7}{5} = \frac{2+7}{5} = \frac{9}{5}$	Al **sumar fracciones** con el mismo denominador se suman los numeradores.
4. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$	$\frac{2}{5} + \frac{3}{7} = \frac{2 \cdot 7 + 3 \cdot 5}{35} = \frac{29}{35}$	**Multiplicar los denominadores** para encontrar un denominador común, y luego **sumar los productos** cruzados del denominador de una fracción con el numerador de la otra.
5. $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$	$\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{2}{3}$	Si hay **factores comunes** en el numerador y el denominador, se pueden **cancelar**.
6. Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $ad = bc$	$\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$, así que $2 \cdot 9 = 3 \cdot 6$	Si dos fracciones son iguales, se cumple la **multiplicación cruzada**.

Para sumar fracciones con denominadores diferentes, por lo general no usamos la Propiedad 4. En cambio, reescribimos las fracciones de modo que tengan el mínimo denominador común que sea posible (a veces menor que el producto de los denominadores), y luego usamos la Propiedad 3. Este denominador es el **M**ínimo **C**omún **D**enominador (MCD) que se describe en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 3 | Uso del MCD para sumar fracciones

Evalúe: $\frac{5}{36} + \frac{7}{120}$

SOLUCIÓN La factorización de cada denominador en factores primos dará

$$36 = 2^2 \cdot 3^2 \quad \text{y} \quad 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$$

Encontramos el mínimo común denominador (MCD) al formar el producto de todos los factores presentes en estas factorizaciones, usando la máxima potencia de cada factor.

Entonces el MCD es $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$. Entonces,

$$\frac{5}{36} + \frac{7}{120} = \frac{5 \cdot 10}{36 \cdot 10} + \frac{7 \cdot 3}{120 \cdot 3}$$ Use el común denominador para reescribir las fracciones.

$$= \frac{50}{360} + \frac{21}{360} = \frac{71}{360}$$ Propiedad 3: Suma de fracciones con el mismo denominador

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **25** ■

▼ La recta real

Los números reales pueden ser representados por puntos sobre una recta, como se muestra en la Figura 3. La dirección positiva (hacia la derecha) está indicada por una flecha. Escogemos un punto de referencia arbitrario O, llamado el **origen**, que corresponde al número real 0. Dada cualquier unidad de medida conveniente, cada número positivo x está representado por el punto sobre la recta a una distancia de x unidades a la derecha del origen, y cada número negativo $-x$ está representado por el punto a x unidades a la izquierda del origen. El número asociado con el punto P se llama coordenada de P y la recta se llama **recta coordenada**, o **recta de los números reales**, o simplemente **recta real**. A veces identificamos el punto con su coordenada y consideramos que un número es un punto sobre la recta real.

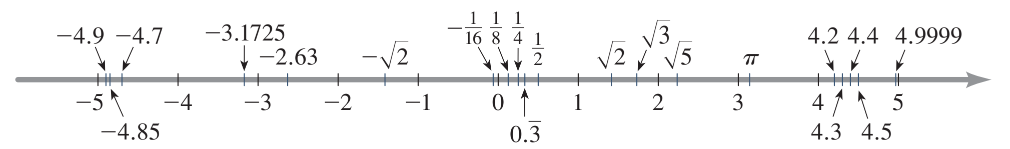


FIGURA 3 La recta real

Los números reales son *ordenados*. Decimos que ***a* es menor que *b*** y escribimos $a < b$ si $b - a$ es un número positivo. Geométricamente, esto significa que a está a la izquierda de b en la recta numérica, o bien, lo que es lo mismo, podemos decir que ***b* es mayor que *a*** y escribimos $b > a$. El símbolo $a \le b$ (o $b \ge a$) quiere decir que $a < b$ o que $a = b$ y se lee "a es menor o igual a b". Por ejemplo, las siguientes son desigualdades verdaderas (vea Figura 4):

$$7 < 7.4 < 7.5 \qquad -\pi < -3 \qquad \sqrt{2} < 2 \qquad 2 \le 2$$

$-\pi$ $\sqrt{2}$ 7.4 7.5

−4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7 8

FIGURA 4

Como se observa en el primer ejemplo de la Figura 4, se pueden comparar más de dos números a la vez si se describe sucesivamente el orden que guardan entre sí.

▼ Conjuntos e intervalos

Un **conjunto** es una colección de objetos, y estos objetos se llaman **elementos** del conjunto. Si S es un conjunto, la notación $a \in S$ significa que a es un elemento de S, y $b \notin S$ quiere decir que b no es un elemento de S. Por ejemplo, si Z representa el conjunto de enteros, entonces $-3 \in Z$ pero $\pi \notin Z$.

Algunos conjuntos pueden describirse si se colocan sus elementos dentro de llaves. Por ejemplo, el conjunto A que está formado por todos los enteros positivos menores que 7 se puede escribir como

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

También podríamos escribir A en **notación constructiva de conjuntos** como

$$A = \{x \mid x \text{ es un entero y } 0 < x < 7\}$$

que se lee "A es el conjunto de todas las x tales que x es un entero y $0 < x < 7$".

Si S y T son conjuntos, entonces su **unión** $S \cup T$ es el conjunto formado por todos los elementos que están en S o T (o en ambos). La **intersección** de S y T es el conjunto $S \cap T$

formado por todos los elementos que están en S y T. En otras palabras, $S \cap T$ es la parte común de S y T. El **conjunto vacío**, denotado por $\varnothing$, es el conjunto que no contiene elementos.

EJEMPLO 4 | Unión e intersección de conjuntos

Si $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $T = \{4, 5, 6, 7\}$ y $V = \{6, 7, 8\}$, encuentre los conjuntos $S \cup T$, $S \cap T$ y $S \cap V$.

SOLUCIÓN

T
$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$
S V

$S \cup T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ Todos los elementos en S o T

$S \cap T = \{4, 5\}$ Elementos comunes a S y T

$S \cap V = \varnothing$ S y V no tienen elementos en común

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 39 ■



FIGURA 5 El intervalo abierto (a, b)



FIGURA 6 El intervalo cerrado $[a, b]$

En Cálculo, se presentan con frecuencia ciertos conjuntos de números reales llamados **intervalos**, y corresponden geométricamente a segmentos de recta. Si $a < b$, entonces el **intervalo abierto** de a a b está formado por todos los números entre a y b y se denota con (a, b). El **intervalo cerrado** de a a b incluye los puntos extremos y se denota con $[a, b]$. Usando la notación constructiva de conjuntos, podemos escribir

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\} \qquad [a, b] = \{x \mid a \le x \le b\}$$

Nótese que los paréntesis ( ) en la notación de intervalo y círculos abiertos en la gráfica de la Figura 5 indican que los puntos extremos están *excluidos* del intervalo, mientras que los corchetes o paréntesis rectangulares [ ] y los círculos sólidos de la Figura 6 indican que los puntos extremos están *incluidos*. Los intervalos también pueden incluir un punto extremo pero no el otro, o pueden extenderse hasta el infinito en una dirección o en ambas. La tabla siguiente es una lista de posibles tipos de intervalos.

Notación	Descripción de conjunto	Gráfica
(a, b)	$\{x \mid a < x < b\}$	a b
$[a, b]$	$\{x \mid a \le x \le b\}$	a b
$[a, b)$	$\{x \mid a \le x < b\}$	a b
$(a, b]$	$\{x \mid a < x \le b\}$	a b
(a, ∞)	$\{x \mid a < x\}$	a
$[a, \infty)$	$\{x \mid a \le x\}$	a
$(-\infty, b)$	$\{x \mid x < b\}$	b
$(-\infty, b]$	$\{x \mid x \le b\}$	b
$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$ (conjunto de todos los números reales)	

El símbolo ∞ (infinito) no representa un número. La notación (a, ∞), por ejemplo, simplemente indica que el intervalo no tiene punto extremo a la derecha y que se prolonga hasta el infinito en la dirección positiva.

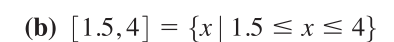
EJEMPLO 5 | Graficación de intervalos

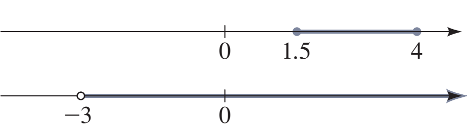
Exprese cada intervalo en términos de desigualdades y, a continuación, grafique el intervalo.

(a) $[-1, 2) = \{x \mid -1 \le x < 2\}$

−1 0 2

(b) $[1.5, 4] = \{x \mid 1.5 \le x \le 4\}$

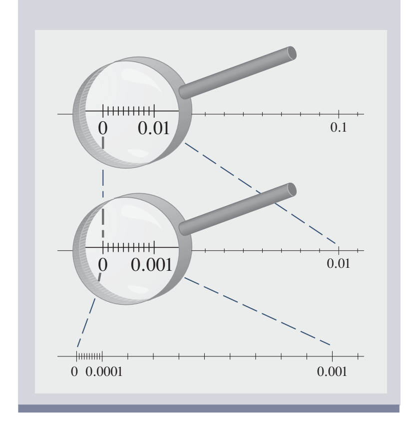




(c) $(-3, \infty) = \{x \mid -3 < x\}$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO 45 ■

No hay número mínimo ni número máximo en un intervalo abierto
Cualquier intervalo contiene un infinito de números; cualquier punto en la gráfica de un intervalo corresponde a un número real. En el intervalo cerrado $[0, 1]$, el número mínimo es 0 y el máximo es 1, pero el intervalo abierto $(0, 1)$ no contiene número mínimo o máximo. Para ver esto, observe que 0.01 es cercano a cero, pero 0.001 es más cercano; 0.0001 es todavía más cercano, y así sucesivamente. Siempre podemos hallar un número en el intervalo $(0, 1)$ más cercano a cero que cualquier número dado. Como 0 no está en el intervalo, el intervalo no contiene un número mínimo. Del mismo modo, 0.99 es cercano a 1, pero 0.999 es más cercano y 0.9999 es todavía más cercano, y así sucesivamente. Como 1 no está en el intervalo, el intervalo no tiene número máximo



EJEMPLO 6 | Hallar uniones e intersecciones de intervalos

Grafique cada conjunto.

(a) $(1, 3) \cap [2, 7]$ **(b)** $(1, 3) \cup [2, 7]$

SOLUCIÓN

(a) La intersección de dos intervalos consta de los números que están en ambos intervalos. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}(1, 3) \cap [2, 7] &= \{x \mid 1 < x < 3 \text{ y } 2 \le x \le 7\}\\ &= \{x \mid 2 \le x < 3\} = [2, 3)\end{aligned}$$

Este conjunto está ilustrado en la Figura 7.

(b) La unión de dos intervalos consta de los números que están en un intervalo o en el otro (o en ambos). Por lo tanto,

$$\begin{aligned}(1, 3) \cup [2, 7] &= \{x \mid 1 < x < 3 \text{ o } 2 \le x \le 7\}\\ &= \{x \mid 1 < x \le 7\} = (1, 7]\end{aligned}$$

Este conjunto está ilustrado en la Figura 8.

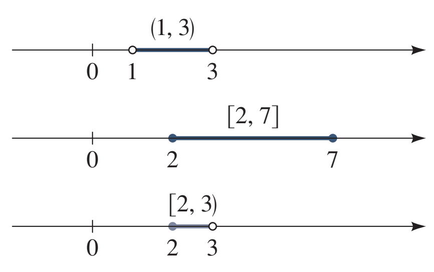


FIGURA 7 $(1, 3) \cap [2, 7] = [2, 3)$

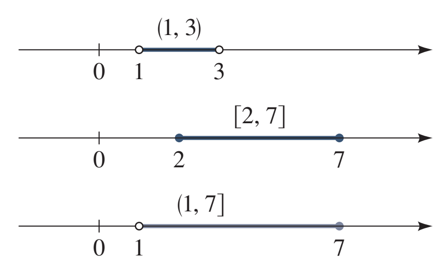


FIGURA 8 $(1, 3) \cup [2, 7] = (1, 7]$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **59** ■

▼ Valor absoluto y distancia

El **valor absoluto** de un número a, denotado por $|a|$, es la distancia de a a 0 en la recta de números reales (vea Figura 9). La distancia es siempre positiva o cero, de modo que tenemos $|a| \ge 0$ para todo número a. Recordando que $-a$ es positivo cuando a es negativo, tenemos la siguiente definición.

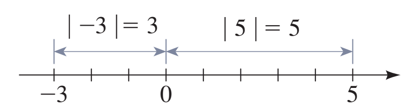


FIGURA 9

DEFINICIÓN DE VALOR ABSOLUTO

Si a es un número real, entonces el **valor absoluto** de a es

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \ge 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

EJEMPLO 7 | Evaluación de valores absolutos de números

(a) $|3| = 3$

(b) $|-3| = -(-3) = 3$

(c) $|0| = 0$

(d) $|3 - \pi| = -(3 - \pi) = \pi - 3$ (porque $3 < \pi \Rightarrow 3 - \pi < 0$)

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **65** ■

Cuando trabajamos con valores absolutos, utilizamos las propiedades siguientes:

PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO

Propiedad	Ejemplo	Descripción
1. $\lvert a \rvert \geq 0$	$\lvert -3 \rvert = 3 \geq 0$	El valor absoluto de un número es siempre positivo o cero.
2. $\lvert a \rvert = \lvert -a \rvert$	$\lvert 5 \rvert = \lvert -5 \rvert$	Un número y su negativo tienen el mismo valor absoluto.
3. $\lvert ab \rvert = \lvert a \rvert \lvert b \rvert$	$\lvert -2 \cdot 5 \rvert = \lvert -2 \rvert \lvert 5 \rvert$	El valor absoluto de un producto es el producto de valores absolutos.
4. $\left\lvert \dfrac{a}{b} \right\rvert = \dfrac{\lvert a \rvert}{\lvert b \rvert}$	$\left\lvert \dfrac{12}{-3} \right\rvert = \dfrac{\lvert 12 \rvert}{\lvert -3 \rvert}$	El valor absoluto de un cociente es el cociente de valores absolutos.

¿Cuál es la distancia sobre la recta real entre los números -2 y 11? De la Figura 10 vemos que la distancia es 13. Llegamos a esto si encontramos ya sea $\lvert 11 - (-2) \rvert = 13$ o $\lvert (-2) - 11 \rvert = 13$. De esta observación hacemos la siguiente definición (vea Figura 11).

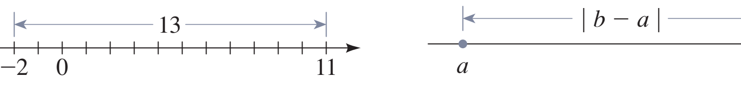


FIGURA 10

FIGURA 11 La longitud de un segmento de recta es $\lvert b - a \rvert$

DISTANCIA ENTRE PUNTOS SOBRE LA RECTA REAL

Si a y b son números reales, entonces la **distancia** entre los puntos a y b sobre la recta real es

$$d(a, b) = \lvert b - a \rvert$$

De la Propiedad 6 de negativos se deduce que

$$\lvert b - a \rvert = \lvert a - b \rvert$$

Esto confirma que, como es de esperarse, la distancia de a a b es la misma que de b a a.

EJEMPLO 8 | Distancia entre puntos sobre la recta real

La distancia entre los números -8 y 2 es

$$d(a, b) = \lvert -8 - 2 \rvert = \lvert -10 \rvert = 10$$

Podemos comprobar geométricamente este cálculo, como se ve en la Figura 12.

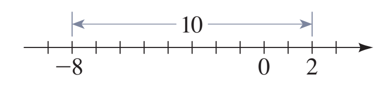


FIGURA 12

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **73** ■

1.1 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Dé un ejemplo de:
   (a) Un número natural
   (b) Un entero que no sea número natural
   (c) Un número racional que no sea entero
   (d) Un número irracional

2. Complete cada enunciado y mencione la propiedad de números reales que haya empleado.
   (a) $ab =$ ________; Propiedad ________
   (b) $a + (b + c) =$ ________; Propiedad ________
   (c) $a(b + c) =$ ________; Propiedad ________

3. El conjunto de números entre 2 y 7, pero que no los incluye, se puede escribir como sigue:
   ________en notación constructiva de conjuntos y
   ________en notación de intervalos.

4. El símbolo $|x|$ representa el _______del número x. Si x no es 0, entonces el signo $|x|$ es siempre_______.

HABILIDADES

5-6 ■ Describa los elementos del conjunto dado que sean
   (a) números naturales
   (b) números enteros
   (c) números racionales
   (d) números irracionales

5. $\{0, -10, 50, \frac{22}{7}, 0.538, \sqrt{7}, 1.2\overline{3}, -\frac{1}{3}, \sqrt[3]{2}\}$

6. $\{1.001, 0.33\overline{3}, -\pi, -11, 11, \frac{13}{15}, \sqrt{16}, 3.14, \frac{15}{3}\}$

7-14 ■ Exprese la propiedad de los números reales que se use.

7. $7 + 10 = 10 + 7$
8. $2(3 + 5) = (3 + 5)2$
9. $(x + 2y) + 3z = x + (2y + 3z)$
10. $2(A + B) = 2A + 2B$
11. $(5x + 1)3 = 15x + 3$
12. $(x + a)(x + b) = (x + a)x + (x + a)b$
13. $2x(3 + y) = (3 + y)2x$
14. $7(a + b + c) = 7(a + b) + 7c$

15-18 ■ Reescriba la expresión usando la propiedad dada de los números reales.

15. Propiedad Conmutativa de la adición, $x + 3 =$
16. Propiedad Asociativa de la multiplicación, $7(3x) =$
17. Propiedad Distributiva, $4(A + B) =$
18. Propiedad Distributiva, $5x + 5y =$

19-24 ■ Use propiedades de números reales para escribir la expresión sin paréntesis.

19. $3(x + y)$ 20. $(a - b)8$
21. $4(2m)$ 22. $\frac{4}{3}(-6y)$
23. $-\frac{5}{2}(2x - 4y)$ 24. $(3a)(b + c - 2d)$

25-30 ■ Ejecute las operaciones indicadas.

25. **(a)** $\frac{3}{10} + \frac{4}{15}$ **(b)** $\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$
26. **(a)** $\frac{2}{3} - \frac{3}{5}$ **(b)** $1 + \frac{5}{8} - \frac{1}{6}$
27. **(a)** $\frac{2}{3}\left(6 - \frac{3}{2}\right)$ **(b)** $0.25\left(\frac{8}{9} + \frac{1}{2}\right)$
28. **(a)** $\left(3 + \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{4}{5}\right)$ **(b)** $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$
29. **(a)** $\dfrac{2}{\frac{2}{3}} - \dfrac{\frac{2}{3}}{2}$ **(b)** $\dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{8} - \frac{1}{9}}$
30. **(a)** $\dfrac{2 - \frac{3}{4}}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}$ **(b)** $\dfrac{\frac{2}{5} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{10} + \frac{3}{15}}$

31-32 ■ Ponga el símbolo correcto ($<$, $>$, o $=$) en el espacio.

31. **(a)** $3 \quad \frac{7}{2}$ **(b)** $-3 \quad -\frac{7}{2}$ **(c)** $3.5 \quad \frac{7}{2}$
32. **(a)** $\frac{2}{3} \quad 0.67$ **(b)** $\frac{2}{3} \quad -0.67$ **(c)** $|0.67| \quad |-0.67|$

33-36 ■ Diga si cada desigualdad es verdadera o falsa.

33. **(a)** $-6 < -10$ **(b)** $\sqrt{2} > 1.41$
34. **(a)** $\dfrac{10}{11} < \dfrac{12}{13}$ **(b)** $-\dfrac{1}{2} < -1$
35. **(a)** $-\pi > -3$ **(b)** $8 \le 9$
36. **(a)** $1.1 > 1.\overline{1}$ **(b)** $8 \le 8$

37-38 ■ Escriba cada enunciado en términos de desigualdades.

37. **(a)** x es positivo
   (b) t es menor a 4
   (c) a es mayor o igual a π
   (d) x es menor a $\frac{1}{3}$ y mayor a -5
   (e) La distancia de p a 3 es como máximo 5

38. **(a)** y es negativa
   (b) z es mayor a 1
   (c) b es como máximo 8
   (d) w es positiva y menor o igual a 17
   (e) y está al menos 2 unidades de π

39-42 ■ Encuentre el conjunto indicado si

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \qquad B = \{2, 4, 6, 8\}$$
$$C = \{7, 8, 9, 10\}$$

39. **(a)** $A \cup B$ **(b)** $A \cap B$
40. **(a)** $B \cup C$ **(b)** $B \cap C$
41. **(a)** $A \cup C$ **(b)** $A \cap C$
42. **(a)** $A \cup B \cup C$ **(b)** $A \cap B \cap C$

43-44 ■ Encuentre el conjunto indicado si

$$A = \{x \mid x \geq -2\} \qquad B = \{x \mid x < 4\}$$
$$C = \{x \mid -1 < x \leq 5\}$$

43. **(a)** $B \cup C$ **(b)** $B \cap C$

44. **(a)** $A \cap C$ **(b)** $A \cap B$

45-50 ■ Exprese el intervalo en términos de desigualdades y, a continuación, grafique el intervalo.

45. $(-3, 0)$ **46.** $(2, 8]$

47. $[2, 8)$ **48.** $[-6, -\frac{1}{2}]$

49. $[2, \infty)$ **50.** $(-\infty, 1)$

51-56 ■ Exprese la desigualdad en notación de intervalos y, a continuación, grafique el intervalo correspondiente.

51. $x \leq 1$ **52.** $1 \leq x \leq 2$

53. $-2 < x \leq 1$ **54.** $x \geq -5$

55. $x > -1$ **56.** $-5 < x < 2$

57–58 ■ Exprese cada conjunto en notación de intervalos.

57. **(a)** −3 0 5

(b) −3 0 5

58. **(a)** 0 2

(b) −2 0

59-64 ■ Grafique el conjunto.

59. $(-2, 0) \cup (-1, 1)$ **60.** $(-2, 0) \cap (-1, 1)$

61. $[-4, 6] \cap [0, 8)$ **62.** $[-4, 6) \cup [0, 8)$

63. $(-\infty, -4) \cup (4, \infty)$ **64.** $(-\infty, 6] \cap (2, 10)$

65-70 ■ Evalúe cada expresión.

65. **(a)** $|100|$ **(b)** $|-73|$

66. **(a)** $|\sqrt{5} - 5|$ **(b)** $|10 - \pi|$

67. **(a)** $||-6| - |-4||$ **(b)** $\dfrac{-1}{|-1|}$

68. **(a)** $|2 - |-12||$ **(b)** $-1 - |1 - |-1||$

69. **(a)** $|(-2) \cdot 6|$ **(b)** $|(-\frac{1}{3})(-15)|$

70. **(a)** $\left|\dfrac{-6}{24}\right|$ **(b)** $\left|\dfrac{7 - 12}{12 - 7}\right|$

71-74 ■ Encuentre la distancia entre los números dados.

71. −3 −2 −1 0 1 2 3

72. −3 −2 −1 0 1 2 3

73. **(a)** 2 y 17 **(b)** −3 y 21 **(c)** $\frac{11}{8}$ y $-\frac{3}{10}$

74. **(a)** $\frac{7}{15}$ y $-\frac{1}{21}$ **(b)** −38 y −57 **(c)** −2.6 y −1.8

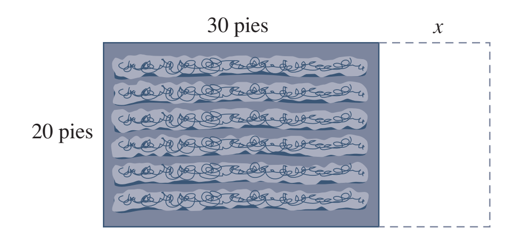
75-76 ■ Exprese cada número decimal como una fracción. (Vea la nota al margen en la página 2.)

75. **(a)** $0.\overline{7}$ **(b)** $0.2\overline{8}$ **(c)** $0.\overline{57}$

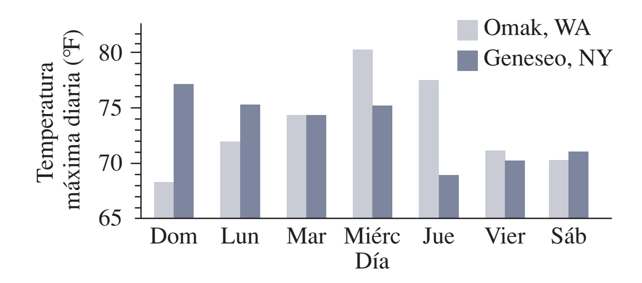
76. **(a)** $5.\overline{23}$ **(b)** $1.3\overline{7}$ **(c)** $2.1\overline{35}$

APLICACIONES

77. Área de un jardín El jardín de legumbres de Mary mide 20 pies por 30 pies, de modo que su área es de $20 \times 30 = 600$ pies². Ella decide agrandarlo, como se ve en la figura, para que el área aumente a $A = 20(30 + x)$. ¿Cuál propiedad de los números reales nos dice que la nueva área también se puede escribir como $A = 600 + 20x$?



78. Variación de temperatura La gráfica de barras muestra las temperaturas máximas diarias para Omak, Washington, y Geneseo, Nueva York, durante cierta semana en junio. Represente con T_O la temperatura en Omak y T_G la temperatura en Geneseo. Calcule $T_O - T_G$ y $|T_O - T_G|$ para cada día que se muestra. ¿Cuál de estos dos valores da más información?

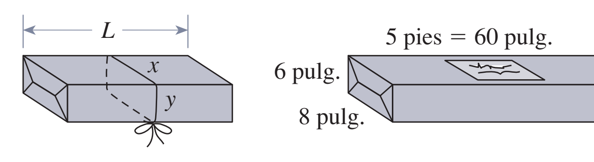


79. Envío de un paquete por correo La oficina de correos solo aceptará paquetes para los cuales la suma de la longitud del lado mayor con el perímetro transverso no sea de más de 108 pulgadas. Así, para el paquete de la figura, debemos tener

$$L + 2(x + y) \leq 108$$

(a) ¿La oficina de correos aceptará un paquete de 6 pulgadas de ancho, 8 pulgadas de profundidad y 5 pies de largo? ¿Y un paquete que mida 2 pies por 2 pies por 4 pies?

(b) ¿Cuál es la máxima longitud aceptable para un paquete que tiene una base cuadrada que mide 9 pulgadas por 9 pulgadas?



DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

80. Signos de números Sean a, b y c números reales tales que $a > 0$, $b < 0$ y $c < 0$. Encuentre el signo de cada expresión.

(a) $-a$	**(b)** $-b$	**(c)** bc
(d) $a - b$	**(e)** $c - a$	**(f)** $a + bc$
(g) $ab + ac$	**(h)** $-abc$	**(i)** ab^2

81. Sumas y productos de números racionales e irracionales Explique por qué la suma, la diferencia y el producto de dos números racionales son números racionales. El producto de dos números irracionales, ¿es necesariamente irracional? ¿Qué se puede decir de la suma?

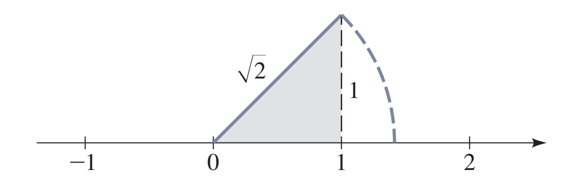
82. Operaciones de números racionales con números irracionales ¿$\frac{1}{2} + \sqrt{2}$ es racional o irracional? ¿$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$ es racional o irracional? En general, ¿qué se puede decir acerca de la suma de un número racional y un número irracional? ¿Qué se puede decir del producto?

83. Comportamiento límite de recíprocos Complete las tablas siguientes. ¿Qué ocurre al tamaño de la fracción $1/x$ cuando x crece? ¿Y cuando x disminuye?

x	$1/x$
1	
2	
10	
100	
1000	

x	$1/x$
1.0	
0.5	
0.1	
0.01	
0.001	

84. Números irracionales y geometría Usando la siguiente figura, explique cómo localizar el punto $\sqrt{2}$ en una recta numérica. ¿Puede localizar $\sqrt{5}$ por medio de un método similar? ¿Qué puede decir de $\sqrt{6}$? Haga una lista de otros números irracionales que puedan hallarse de este modo.



85. Operaciones conmutativa y no conmutativa Hemos visto que la adición y la multiplicación son operaciones conmutativas.

(a) ¿La sustracción es conmutativa?

(b) ¿La división de números reales diferentes de cero es conmutativa?

1.2 EXPONENTES Y RADICALES

Exponentes enteros ▶ Reglas para trabajar con exponentes ▶ Notación científica ▶ Radicales ▶ Exponentes racionales ▶ Racionalización del denominador

En esta sección damos significado a expresiones como $a^{m/n}$ en las que el exponente m/n es un número racional. Para hacer esto, necesitamos recordar algunos datos acerca de exponentes enteros, radicales y raíces n-ésimas.

▼ Exponentes enteros

Usualmente, un producto de números idénticos se escribe en notación exponencial. Por ejemplo, $5 \cdot 5 \cdot 5$ se escribe como 5^3. En general, tenemos la siguiente definición.

NOTACIÓN EXPONENCIAL

Si a es cualquier número real y n es un entero positivo, entonces la ***n*-ésima potencia** de a es

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \cdots \cdot a}_{n \text{ factores}}$$

El número a se denomina **base**, y n se denomina **exponente**.


© Image 100/Corbis

CAPÍTULO 3

FUNCIONES POLINOMIALES Y RACIONALES

Las funciones definidas por medio de expresiones con polinomios se denominan funciones polinomiales. Las gráficas de funciones polinomiales pueden tener numerosos picos y valles; esto las hace modelos apropiados para muchas situaciones prácticas. Por ejemplo, la propietaria de una fábrica observa que si aumenta el número de trabajadores, aumenta la productividad, pero si hay demasiados trabajadores entonces la productividad empieza a disminuir. Esta situación está modelada por una función polinomial de grado 2 (una función cuadrática). Otro ejemplo, cuando se golpea un balón de volibol, este primero sube y luego baja, siguiendo una trayectoria que también está modelada por una función cuadrática. Las gráficas de funciones polinomiales son curvas sin irregularidades que se usan para diseñar muchas cosas. Por ejemplo, los diseñadores de botes de vela unen partes de las gráficas de diferentes funciones cúbicas (llamadas curvas paramétricas) para hacer las curvas del casco de un bote de velas.

3.1 FUNCIONES Y MODELOS CUADRÁTICOS

Graficar funciones cuadráticas usando la forma estándar ▶ Valores máximo y mínimo de funciones cuadráticas ▶ Modelado con funciones cuadráticas

Una función polinomial es una función que está definida por medio de una expresión con polinomios. Una **función polinomial de grado n** es una función de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Las expresiones con polinomios están definidas en la Sección 1.3.

Ya hemos estudiado funciones polinomiales de grados 0 y 1. Estas son funciones de la forma $P(x) = a_0$ y $P(x) = a_1x + a_0$, respectivamente, cuyas gráficas son rectas. En esta sección estudiamos las funciones de grado 2 que reciben el nombre de funciones cuadráticas.

FUNCIONES CUADRÁTICAS

Una **función cuadrática** es una función polinomial de grado 2. Una función cuadrática es una función de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0$$

Vemos en esta sección la forma en que las funciones cuadráticas modelan muchos fenómenos reales. Empecemos por analizar las gráficas de funciones cuadráticas.

▼ Graficar funciones cuadráticas usando la forma estándar

Para una definición geométrica de parábolas, vea la Sección 7.1.

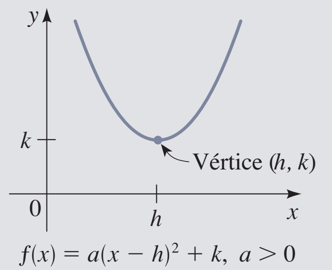
Si tomamos $a = 1$ y $b = c = 0$ en la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, obtenemos la función cuadrática $f(x) = x^2$, cuya gráfica es la parábola graficada en el Ejemplo 1 de la Sección 2.2. De hecho, la gráfica de cualquier función cuadrática es una **parábola** que puede obtenerse de la gráfica de $f(x) = x^2$ por las transformaciones dadas en la Sección 2.5.

FORMA ESTÁNDAR DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ puede expresarse en la **forma estándar**

$$f(x) = a(x - h)^2 + k$$

completando el cuadrado. La gráfica de f es una parábola con vértice (h, k); la parábola abre hacia arriba si $a > 0$ o hacia abajo si $a < 0$.



$f(x) = a(x - h)^2 + k,\ a > 0$

y
Vértice (h, k)
k
0
h
x

$f(x) = a(x - h)^2 + k,\ a < 0$

EJEMPLO 1 | Forma estándar de una función cuadrática

Sea $f(x) = 2x^2 - 12x + 23$.

(a) Exprese f en forma estándar. **(b)** Trace la gráfica de f.

Completar el cuadrado se estudia en la Sección 1.5.

$f(x) = 2(x - 3)^2 + 5$

El vértice es $(3, 5)$

SOLUCIÓN

(a) Como el coeficiente de x^2 no es 1, debemos factorizar este coeficiente de los términos que contienen x antes de completar el cuadrado.

$$f(x) = 2x^2 - 12x + 23$$

$$= 2(x^2 - 6x) + 23 \quad \text{Factorice 2 de los términos en } x$$

$$= 2(x^2 - 6x + 9) + 23 - 2 \cdot 9 \quad \text{Complete el cuadrado: sume 9 dentro de paréntesis, reste } 2 \cdot 9 \text{ fuera}$$

$$= 2(x - 3)^2 + 5 \quad \text{Factorice y simplifique}$$

La forma estándar es $f(x) = 2(x\ 2\ 3)^2 + 5$.

(b) La forma estándar nos dice que obtenemos la gráfica de f al tomar la parábola $y = x^2$, desplazándola 3 unidades a la derecha, alargándola en un factor de 2 y moviéndola 5 unidades hacia arriba. El vértice de la parábola está en (3, 5), y la parábola abre hacia arriba. Alargamos la gráfica de la Figura 1 observando que el punto de intersección en y es $f(0) = 23$.

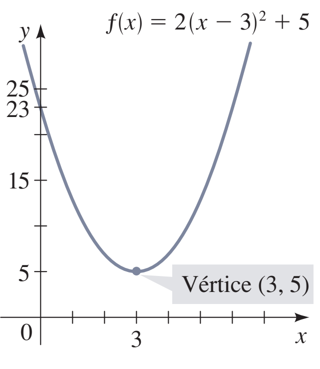


FIGURA 1

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **13**

▼ Valor máximo o mínimo de funciones cuadráticas

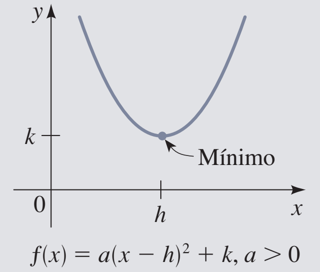
Si una función cuadrática tiene vértice (h, k), entonces la función tiene un valor mínimo en el vértice si su gráfica abre hacia arriba y valor máximo en el vértice si su gráfica abre hacia abajo. Por ejemplo, la función graficada en la Figura 1 tiene valor mínimo 5 cuando $x = 3$, porque el vértice (3, 5) es el punto más bajo en la gráfica.

VALOR MÁXIMO O MÍNIMO DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

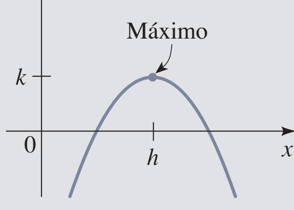
Sea f una función cuadrática con forma estándar $f(x) = a(x - h)^2 + k$. El valor máximo o mínimo de f ocurre en $x = h$.

Si $a > 0$, entonces el **valor mínimo** de f es $f(h) = k$.

Si $a < 0$, entonces el **valor máximo** de f es $f(h) = k$.



$f(x) = a(x - h)^2 + k,\ a > 0$



$f(x) = a(x - h)^2 + k,\ a < 0$

EJEMPLO 2 | Valor mínimo de una función cuadrática



Considere la función cuadrática $f(x) = 5x^2 - 30x + 49$.

(a) Exprese f en forma estándar.

(b) Trace la gráfica de f.

(c) Encuentre el valor mínimo de f.

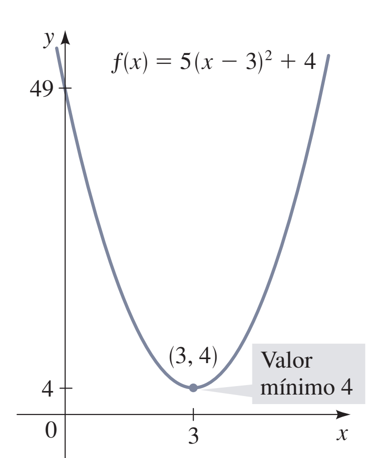


FIGURA 2

SOLUCIÓN

(a) Para expresar esta función cuadrática en forma estándar, completamos el cuadrado.

$$\begin{aligned} f(x) &= 5x^2 - 30x + 49 \\ &= 5(x^2 - 6x) + 49 && \text{Factorice 5 de términos en } x \\ &= 5(x^2 - 6x + 9) + 49 - 5 \cdot 9 && \text{Complete el cuadrado: sume 9 dentro de paréntesis, reste } 5 \cdot 9 \text{ fuera} \\ &= 5(x - 3)^2 + 4 && \text{Factorice y simplifique} \end{aligned}$$

(b) La gráfica es la parábola que tiene su vértice en $(3, 4)$ y abre hacia arriba, como se ve en la Figura 2.

(c) Como el coeficiente de x^2 es positivo, f tiene un valor mínimo. El valor mínimo es $f(3) = 4$.

AHORA TRATE DE HACER EL EJERCICIO **25** ■

EJEMPLO 3 | Valor máximo de una función cuadrática

Considere la función cuadrática $f(x) = -x^2 + x + 2$.

(a) Exprese f en forma estándar.

(b) Trace la gráfica de f.

(c) Encuentre el valor máximo de f.

SOLUCIÓN

(a) Para expresar esta función cuadrática en forma estándar, completamos el cuadrado.

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + x + 2 \\ &= -(x^2 - x) + 2 && \text{Factorice } -1 \text{ de los términos en } x \\ &= -\left(x^2 - x + \tfrac{1}{4}\right) + 2 - (-1)\tfrac{1}{4} && \text{Complete el cuadrado: Sume } \tfrac{1}{4} \text{ dentro de paréntesis, reste } (-1)\tfrac{1}{4} \text{ fuera} \\ &= -\left(x - \tfrac{1}{2}\right)^2 + \tfrac{9}{4} && \text{Factorice y simplifique} \end{aligned}$$

(b) De la forma estándar vemos que la gráfica es una parábola que abre hacia abajo y tiene vértice $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$. Como ayuda para trazar la gráfica, encontramos los puntos de intersección. Para hallar los puntos de intersección en x, hacemos $f(x) = 0$ y factorizamos la ecuación resultante.

$$\begin{aligned} -x^2 + x + 2 &= 0 && \text{Haga } y = 0 \\ x^2 - x - 2 &= 0 && \text{Multiplique por } -1 \\ (x - 2)(x + 1) &= 0 && \text{Factorice} \end{aligned}$$

Así, los puntos de intersección en x son $x = 2$ y $x = -1$. La gráfica de f se traza en la Figura 3.

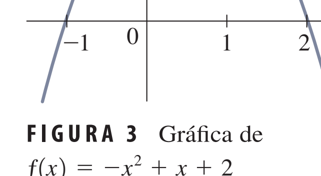


FIGURA 3 Gráfica de $f(x) = -x^2 + x + 2$

(c) Como el coeficiente de x^2 es negativo, f tiene un valor máximo, que es $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **27** ■



Expresar una función cuadrática en forma estándar nos ayuda a trazar su gráfica así como a hallar su valor máximo o mínimo. Si estamos interesados en hallar el valor máximo o

mínimo, entonces existe una fórmula para hacerlo. Esta fórmula se obtiene completando el cuadrado para la función cuadrática general como sigue:

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c && \text{Factorice } a \text{ de los términos en } x \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) && \text{Complete el cuadrado: sume } \frac{b^2}{4a^2} \text{ dentro de paréntesis, reste } a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) \text{ fuera} \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} && \text{Factorice}
\end{aligned}$$

Esta ecuación está en forma estándar con $h = -b/(2a)$ y $k = c - b^2/(4a)$. Como el valor máximo o mínimo se presenta en $x = h$, tenemos el siguiente resultado.

VALOR MÁXIMO O MÍNIMO DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

El valor máximo o mínimo de una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ se presenta en

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Si $a > 0$, entonces el **valor mínimo** es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

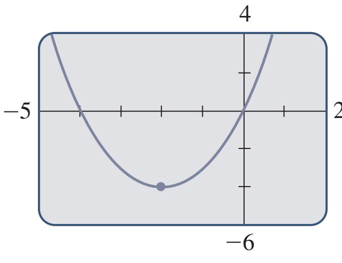
Si $a < 0$, entonces el **valor máximo** es $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

EJEMPLO 4 | Hallar valores máximo y mínimo de funciones cuadráticas

Encuentre el valor máximo o mínimo de estas funciones cuadráticas.

(a) $f(x) = x^2 + 4x$ **(b)** $g(x) = -2x^2 + 4x - 5$

SOLUCIÓN



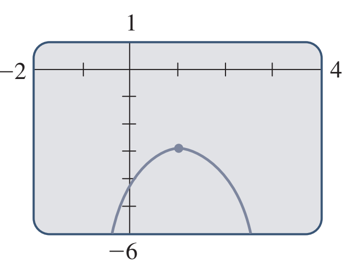
El valor mínimo ocurre en $x = -2$.

(a) Esta es una función cuadrática con $a = 1$ y $b = 4$. Entonces, el valor máximo o mínimo se presenta en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot 1} = -2$$

Como $a > 0$, la función tiene el valor *mínimo*.

$$f(-2) = (-2)^2 + 4(-2) = -4$$



El valor máximo ocurre en $x = 1$.

(b) Esta es una función cuadrática con $a = -2$ y $b = 4$. Entonces, el valor máximo o mínimo se presenta en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2 \cdot (-2)} = 1$$

Como $a < 0$, la función tiene el valor *máximo*

$$f(1) = -2(1)^2 + 4(1) - 5 = -3$$



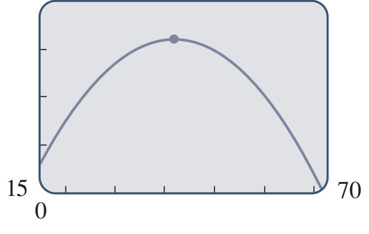
▼ Modelado con funciones cuadráticas

Estudiamos algunos ejemplos de fenómenos reales que son modelados por funciones cuadráticas. Estos ejemplos y los ejercicios de *Aplicación* para esta sección presentan parte de la variedad de situaciones que de manera natural son modelados por funciones cuadráticas.

EJEMPLO 5 | Rendimiento máximo en kilometraje de un auto

La mayor parte de los autos dan su mejor rendimiento en kilometraje cuando corren a una rapidez relativamente baja. El rendimiento M para cierto auto nuevo está modelado por la función

$$M(s) = -\frac{1}{28}s^2 + 3s - 31, \qquad 15 \le s \le 70$$



El rendimiento máximo ocurre a 42 mi/h.

donde s es la rapidez en mi/h y M se mide en mi/gal. ¿Cuál es el mejor rendimiento del auto y a qué rapidez se obtiene?

SOLUCIÓN La función M es una función cuadrática con $a = -\frac{1}{28}$ y $b = 3$. Entonces, su valor máximo ocurre cuando

$$s = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2\left(-\frac{1}{28}\right)} = 42$$

El máximo es $M(42) = -\frac{1}{28}(42)^2 + 3(42) - 31 = 32$. Por lo tanto, el mejor rendimiento del auto es de 32 mi/gal, cuando está corriendo a 42 mi/h.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **67** ■

EJEMPLO 6 | Maximizar ingresos por venta de boletos

Un equipo de hockey juega en una cancha que tiene capacidad para 15 000 espectadores. Con el precio del boleto a \$14, el promedio de asistencia en juegos recientes ha sido de 9 500. Un estudio de mercado indica que por cada dólar que baje el precio del boleto, el promedio de asistencia aumenta en 1000.

(a) Encuentre una función que modele el ingreso en términos del precio de boletos.

(b) Encuentre el precio que lleve al máximo el ingreso por venta de boletos.

(c) ¿Qué precio del boleto es tan alto que nadie asiste y por lo tanto no se generan ingresos?

SOLUCIÓN

(a) Exprese verbalmente el modelo. El modelo que buscamos es una función que dé el ingreso para cualquier precio del boleto.

ingreso = precio del boleto × asistencias

Escoja la variable. Hay dos cantidades que varían: precio del boleto y asistencia. Como la función que buscamos depende del precio, hacemos

$$x = \text{precio del boleto}$$

A continuación, expresamos la asistencia en términos de x.

Verbalmente	**En álgebra**
Precio del boleto	x
Cantidad que baja precio del boleto	$14 - x$
Aumento en asistencia	$1000(14 - x)$
Asistencia	$9500 + 1000(14 - x)$

Establezca el modelo. El modelo que buscamos es la función R que da el ingreso para un determinado precio de boleto x.

$$\text{ingreso} = \text{precio del boleto} \times \text{asistencias}$$

$$R(x) = x \times [9500 + 1000(14 - x)]$$
$$R(x) = x(23\,500 - 1000x)$$
$$R(x) = 23\,500x - 1000x^2$$

(b) Use el modelo. Como R es función cuadrática con $a = -1000$ y $b = 23\,500$, el máximo ocurre en

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{23\,500}{2(-1000)} = 11.75$$

Por lo tanto, el precio de boleto de \$11.75 da el máximo ingreso.

(c) Use el modelo. Deseamos hallar el precio del boleto por el que $R(x) = 0$.

$$23\,500x - 1000x^2 = 0 \qquad \text{Haga } R(x) = 0$$
$$23.5x - x^2 = 0 \qquad \text{Divida entre 1000}$$
$$x(23.5 - x) = 0 \qquad \text{Factorice}$$
$$x = 0 \quad \text{o} \quad x = 23.5 \qquad \text{Despeje } x$$

Por lo tanto, de acuerdo con este modelo, el precio del boleto de \$23.50 es simplemente demasiado alto; a ese precio, nadie va a ver jugar a su equipo. (Desde luego, el ingreso también es cero si el precio del boleto es cero.)

150000

0 25

La asistencia máxima ocurre cuando el precio del boleto es \$11.75.

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **77**

3.1 EJERCICIOS

CONCEPTOS

1. Para poner la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ en forma estándar, completamos el_________.

2. La función cuadrática $f(x) = a(x - h)^2 + k$ está en forma estándar.

(a) La gráfica de f es una parábola con vértice (___,___).

(b) Si $a > 0$, la gráfica de f abre hacia _______. En este caso $f(h) = k$ es el valor _______de f.

(c) Si $a < 0$, la gráfica de f abre hacia _______. En este caso $f(h) = k$ es el valor _______de f.

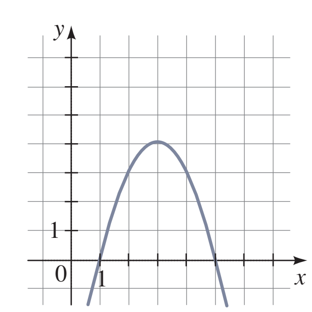
3. La gráfica de $f(x) = 2(x - 3)^2 + 5$ es una parábola que abre hacia ______, con su vértice en (___,___), y $f(3) =$ _____es el valor (mínimo/máximo)____de f.

4. La gráfica de $f(x) = -2(x - 3)^2 + 5$ es una parábola que abre hacia ______, con su vértice en (___,___), y $f(3) =$ ____ es el valor (mínimo/máximo)____ de f.

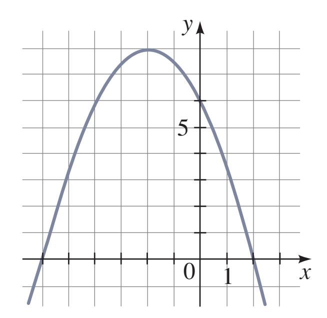
HABILIDADES

5-8 ■ Nos dan la gráfica de una función cuadrática f. **(a)** Encuentre las coordenadas del vértice. **(b)** Encuentre el valor máximo o mínimo de f. **(c)** Encuentre el dominio y rango de f.

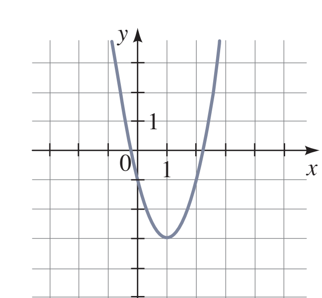
5. $f(x) = -x^2 + 6x - 5$



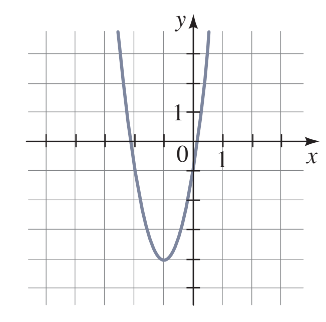
6. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$



7. $f(x) = 2x^2 - 4x - 1$



8. $f(x) = 3x^2 + 6x - 1$



9-22 ■ Nos dan una función cuadrática. **(a)** Exprese la función cuadrática en forma estándar. **(b)** Encuentre su vértice y su(s) punto(s) de intersección en x y en y. **(c)** Trace su gráfica.

9. $f(x) = x^2 - 6x$ **10.** $f(x) = x^2 + 8x$

11. $f(x) = 2x^2 + 6x$ **12.** $f(x) = -x^2 + 10x$

13. $f(x) = x^2 + 4x + 3$ **14.** $f(x) = x^2 - 2x + 2$

15. $f(x) = -x^2 + 6x + 4$ **16.** $f(x) = -x^2 - 4x + 4$

17. $f(x) = 2x^2 + 4x + 3$ **18.** $f(x) = -3x^2 + 6x - 2$

19. $f(x) = 2x^2 - 20x + 57$ **20.** $f(x) = 2x^2 + x - 6$

21. $f(x) = -4x^2 - 16x + 3$ **22.** $f(x) = 6x^2 + 12x - 5$

23-32 ■ Nos dan una función cuadrática. **(a)** Exprese la función cuadrática en forma estándar. **(b)** Trace su gráfica. **(c)** Encuentre su valor máximo o mínimo.

23. $f(x) = x^2 + 2x - 1$ **24.** $f(x) = x^2 - 8x + 8$

25. $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$ **26.** $f(x) = 5x^2 + 30x + 4$

27. $f(x) = -x^2 - 3x + 3$ **28.** $f(x) = 1 - 6x - x^2$

29. $g(x) = 3x^2 - 12x + 13$ **30.** $g(x) = 2x^2 + 8x + 11$

31. $h(x) = 1 - x - x^2$ **32.** $h(x) = 3 - 4x - 4x^2$

33-42 ■ Encuentre el valor máximo o mínimo de la función.

33. $f(x) = x^2 + x + 1$ **34.** $f(x) = 1 + 3x - x^2$

35. $f(t) = 100 - 49t - 7t^2$ **36.** $f(t) = 10t^2 + 40t + 113$

37. $f(s) = s^2 - 1.2s + 16$ **38.** $g(x) = 100x^2 - 1500x$

39. $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 6$ **40.** $f(x) = -\dfrac{x^2}{3} + 2x + 7$

41. $f(x) = 3 - x - \frac{1}{2}x^2$ **42.** $g(x) = 2x(x - 4) + 7$

43. Encuentre una función cuya gráfica es una parábola con vértice $(1, -2)$ y que pasa por el punto $(4, 16)$.

44. Encuentre una función cuya gráfica es una parábola con vértice $(3, 4)$ y que pasa por el punto $(1, -8)$.

45-48 ■ Encuentre el dominio y rango de la función.

45. $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ **46.** $f(x) = x^2 - 2x - 3$

47. $f(x) = 2x^2 + 6x - 7$ **48.** $f(x) = -3x^2 + 6x + 4$



49-50 ■ Nos dan una función cuadrática. **(a)** Use una calculadora graficadora para hallar el valor máximo o mínimo de la función cuadrática f, correcta a dos lugares decimales. **(b)** Encuentre el valor exacto máximo o mínimo de f, y compárelo con su respuesta de la parte (a).

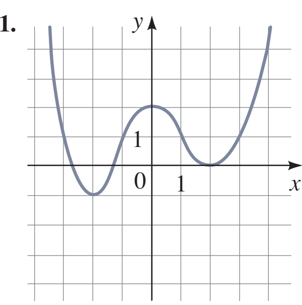
49. $f(x) = x^2 + 1.79x - 3.21$

50. $f(x) = 1 + x - \sqrt{2}x^2$

51-54 ■ Encuentre todos los valores máximo y mínimo de la función cuya gráfica se muestra.

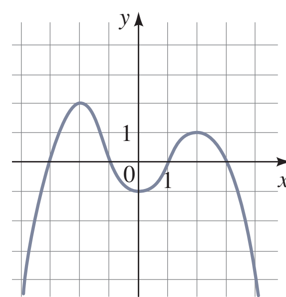


51.

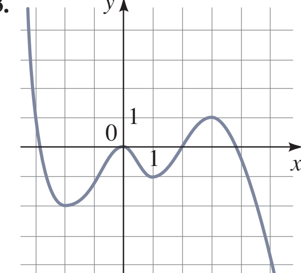




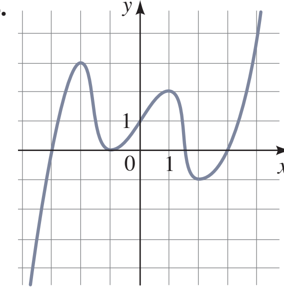
52.



53.



54.





55-62 ■ Encuentre los valores máximo y mínimo locales de la función y el valor de x en el que se presenta cada uno. Exprese cada respuesta correcta a dos lugares decimales.

55. $f(x) = x^3 - x$

56. $f(x) = 3 + x + x^2 - x^3$

57. $g(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2$

58. $g(x) = x^5 - 8x^3 + 20x$

59. $U(x) = x\sqrt{6 - x}$

60. $U(x) = x\sqrt{x - x^2}$

61. $V(x) = \dfrac{1 - x^2}{x^3}$

62. $V(x) = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$

APLICACIONES

63. Altura de una pelota Si una pelota es lanzada directamente hacia arriba con una velocidad de 40 pies/s, su altura (en pies) después de t segundos está dada por $y = 40t - 16t^2$. ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota?

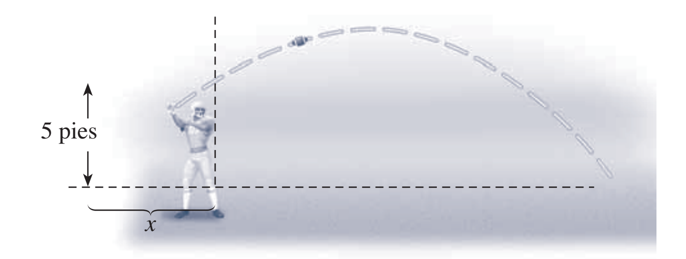
64. Trayectoria de un balón Un balón es lanzado por un campo desde una altura de 5 pies sobre el suelo, a un ángulo de 45° con la horizontal, a una rapidez de 20 pies/s. Puede deducirse por principios físicos que la trayectoria del balón está modelada por la función

$$y = -\frac{32}{(20)^2}x^2 + x + 5$$

donde x es la distancia en pies que el balón ha recorrido horizontalmente.

(a) Encuentre la máxima altura alcanzada por el balón.

(b) Encuentre la distancia horizontal que el balón ha recorrido cuando cae al suelo.



65. Ingresos Un fabricante encuentra que el ingreso generado por vender x unidades de cierta mercancía está dado por la función $R(x) = 80x - 0.4x^2$, donde el ingreso $R(x)$ se mide en dólares. ¿Cuál es el ingreso máximo, y cuántas unidades deben fabricarse para obtener este máximo?

66. Ventas Un vendedor de bebidas gaseosas en una conocida playa analiza sus registros de ventas y encuentra que si vende x latas de gaseosa en un día, su utilidad (en dólares) está dada por

$$P(x) = -0.001x^2 + 3x - 1800$$

¿Cuál es su utilidad máxima por día, y cuántas latas debe vender para obtener una utilidad máxima?

67. Publicidad La efectividad de un anuncio comercial por televisión depende de cuántas veces lo ve una persona. Después de algunos experimentos, una agencia de publicidad encontró que si la efectividad E se mide en una escala de 0 a 10, entonces

$$E(n) = \tfrac{2}{3}n - \tfrac{1}{90}n^2$$

donde n es el número de veces que una persona ve un anuncio comercial determinado. Para que un anuncio tenga máxima efectividad, ¿cuántas veces debe verlo una persona?

68. Productos farmacéuticos Cuando cierto medicamento se toma oralmente, la concentración de la droga en el torrente sanguíneo del paciente después de t minutos está dada por $C(t) = 0.06t - 0.0002t^2$, donde $0 \le t \le 240$ y la concentración se mide en mg/L. ¿Cuándo se alcanza la máxima concentración de suero, y cuál es esa máxima concentración?

69. Agricultura El número de manzanas producidas por cada árbol en una huerta de manzanos depende de la densidad con que estén plantados los árboles. Si n árboles se plantan en un acre de terreno, entonces cada árbol produce $900 - 9n$ manzanas. Por lo tanto, el número de manzanas producidas por acre es

$$A(n) = n(900 - 9n)$$

¿Cuántos árboles deben plantarse por acre para obtener la máxima producción de manzanas?



70. Agricultura En cierto viñedo se encuentra que cada una de las vides produce unas 10 libras de uvas en una temporada cuando unas 700 vides están plantadas por acre. Por cada vid individual que se planta, la producción de cada vid disminuye alrededor de 1%. Por lo tanto, el número de libras de uvas producidas por acre está modelado por

$$A(n) = (700 + n)(10 - 0.01n)$$

donde n es el número de vides adicionales. Encuentre el número de vides que deben plantarse para llevar al máximo la producción de uvas.

71-74 ■ Use las fórmulas de esta sección para dar una solución alternativa al problema indicado en *Enfoque sobre modelado: Modelado con funciones* en las páginas 239-248.

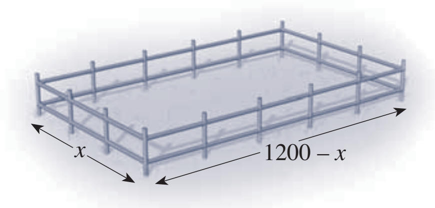
71. Problema 21 **72.** Problema 22

73. Problema 25 **74.** Problema 24

75. Cercar un corral para caballos Carol tiene 2400 pies de maya para cercar un corral rectangular para caballos.

(a) Encuentre una función que modele el área del corral en términos del ancho x del corral.

(b) Encuentre las dimensiones del rectángulo que lleve al máximo el área del corral.

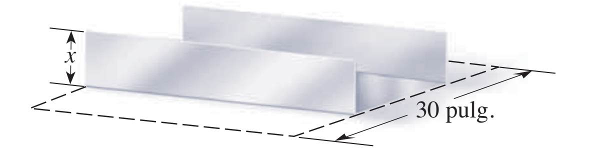


76. Hacer un canal para agua de lluvia Un canal para agua pluvial se forma doblando hacia arriba los lados de una lámina metálica rectangular de 30 pulgadas de ancho, como se ve en la figura.

(a) Encuentre una función que modele el área de sección transversal del canal en términos de x.

(b) Encuentre el valor de x que lleve al máximo el área de la sección transversal del canal.

(c) ¿Cuál es la máxima área de la sección transversal del canal?



77. Ingresos en un estadio Un equipo de béisbol juega en un estadio con capacidad para 55 000 espectadores. Con el precio del boleto en \$10, el promedio de asistencia en partidos recientes ha sido de 27 000. Un estudio de mercado indica que por cada dólar que disminuye el precio del boleto, la asistencia sube en 3 000.

(a) Encuentre una función que modele el ingreso en términos del precio del boleto.

(b) Encuentre el precio que lleve al máximo los ingresos por venta de boletos.

(c) ¿Qué precio del boleto es tan alto como para no generar ingresos?

78. Maximizar utilidades Una sociedad observadora de aves en cierta comunidad hace y vende alimentadores sencillos de aves, para recaudar dinero para sus actividades de conservación. Los materiales para cada alimentador cuestan \$6, y la sociedad vende un promedio de 20 por semana a un precio de \$10 cada uno. La sociedad ha estado considerando elevar el precio, de modo que lleva a cabo un estudio y encuentra que por cada dólar de aumento, pierde 2 ventas por semana.

(a) Encuentre una función que modele las utilidades semanales en términos del precio por alimentador.

(b) ¿Qué precio debe cobrar la sociedad por cada alimentador para maximizar las utilidades? ¿Cuáles son las utilidades máximas semanales?

DESCUBRIMIENTO ■ DISCUSIÓN ■ REDACCIÓN

79. Vértice y puntos de intersección en x Sabemos que la gráfica de la función cuadrática $f(x) = (x - m)(x - n)$ es una parábola. Trace una gráfica aproximada del aspecto que tendría esa parábola. ¿Cuáles son los puntos de intersección en x de la gráfica de f? Puede el lector saber de su gráfica ¿cuál es la coordenada x del vértice en términos de m y n? (Use la simetría de la parábola.) Confirme su respuesta al expandir y usar las fórmulas de esta sección.

80. Máximo de una función polinomial de cuarto grado Encuentre el valor máximo de la función

$$f(x) = 3 + 4x^2 \ 2 \ x^4$$

[*Sugerencia:* Sea $t = x^2$.]

3.2 FUNCIONES POLINOMIALES Y SUS GRÁFICAS

Graficar funciones polinomiales básicas ▶ Comportamiento en los extremos y el término principal ▶ Uso de ceros para graficar funciones polinomiales ▶ Forma de la gráfica cerca de un cero ▶ Máximos y mínimos locales de funciones polinomiales

En esta sección estudiamos funciones polinomiales de cualquier grado, pero antes de trabajar con funciones polinomiales, debemos estar de acuerdo con cierta terminología.

FUNCIONES POLINOMIALES

Una **función polinomial de grado *n*** es una función de la forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde n es un entero no negativo y $a_n \neq 0$.

Los números $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ se llaman **coeficientes** del polinomio.

El número a_0 es el **coeficiente constante** o **término constante**.

El número a_n, el coeficiente de la mayor potencia, es el **coeficiente principal**, y el término $a_n x^n$ es el **término principal**.

Con frecuencia nos referimos a funciones polinomiales simplemente como *polinomios*. El siguiente polinomio tiene grado 5, coeficiente principal 3 y término constante -6.

Coeficiente principal 3

Grado 5

Término constante -6

$$3x^5 + 6x^4 - 2x^3 + x^2 + 7x - 6$$

Término principal $3x^5$

Coeficientes $3, 6, -2, 1, 7$ y -6

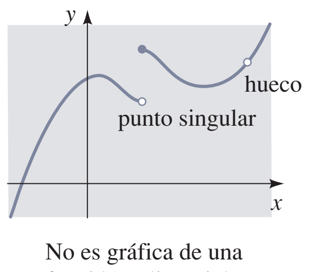
A continuación veamos algunos ejemplos más de funciones polinomiales.

$$P(x) = 3 \qquad \text{Grado 0}$$
$$Q(x) = 4x - 7 \qquad \text{Grado 1}$$
$$R(x) = x^2 + x \qquad \text{Grado 2}$$
$$S(x) = 2x^3 - 6x^2 - 10 \qquad \text{Grado 3}$$

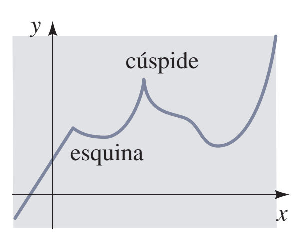
Si un polinomio está formado por un solo término, entonces se llama **monomio**. Por ejemplo, $P(x) = x^3$ y $Q(x) = -6x^5$ son monomios.

▼ Graficar funciones polinomiales básicas

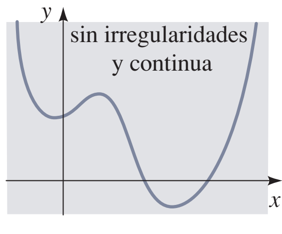
Las gráficas de polinomios de grado 0 o 1 son rectas (Sección 1.12), y las gráficas de polinomios de grado 2 son parábolas (Sección 3.1). Cuanto mayor sea el grado de un polinomio, más complicada puede ser su gráfica. No obstante, la gráfica de una función polinomial es **continua**. Esto significa que la gráfica no tiene puntos singulares ni huecos (vea Figura 1). Además, la gráfica de una función polinomial es una curva sin irregularidades; esto es, no tiene esquinas ni puntos agudos (cúspides) como se muestra en la Figura 1.



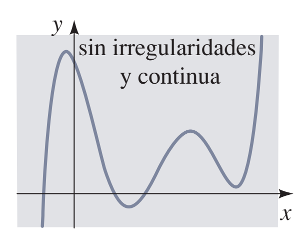
No es gráfica de una función polinomial



No es gráfica de una función polinomial



Gráfica de una función polinomial



Gráfica de una función polinomial

FIGURA 1

Las funciones polinomiales más sencillas son las definidas con monomios $P(x) = x^n$, cuyas gráficas se ven en la Figura 2. Como lo sugiere la figura, la gráfica de $P(x) = x^n$ tiene la misma forma general que la gráfica de $y = x^2$ cuando n es par y la misma forma general que la gráfica de $y = x^3$ cuando n es impar. Sin embargo, cuando el grado n es más grande, las gráficas se aplanan alrededor del origen y son más pronunciadas en otras partes.

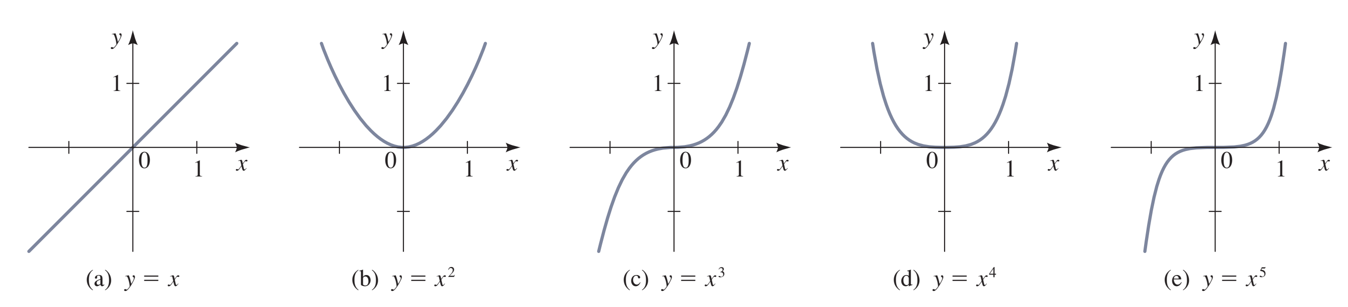


FIGURA 2 Gráficas de monomios

EJEMPLO 1 | Transformaciones de funciones monomiales

Trace las gráficas de las siguientes funciones.

(a) $P(x) = -x^3$ **(b)** $Q(x) = (x - 2)^4$

(c) $R(x) = -2x^5 + 4$

LAS MATEMÁTICAS EN EL MUNDO MODERNO

Curvas paramétricas

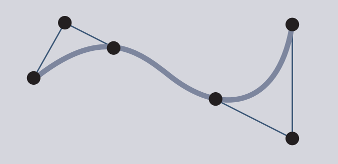


Una curva paramétrica es una larga tira de madera que se curva al mismo tiempo que se mantiene fija en ciertos puntos. En el pasado, los constructores de barcos empleaban curvas paramétricas para crear la forma curva del casco de un bote. Las curvas paramétricas también se usan para hacer las curvas de un piano, un violín o la boca de salida de una tetera.



Unos matemáticos descubrieron que se pueden obtener formas de curvas paramétricas al unir piezas de polinomios. Por ejemplo, puede hacerse que la gráfica de un polinomio cúbico se ajuste a puntos específicos si se ajustan los coeficientes del polinomio (vea el Ejemplo 10).

Las curvas obtenidas en esta forma reciben el nombre de curvas paramétricas cúbicas. En los modernos programas de diseño por computadora, como el Adobe Illustrator o el Microsoft Paint, se puede trazar una curva al fijar dos puntos y luego usar el ratón para arrastrar uno o más puntos de ancla. Mover los puntos de ancla significa ajustar los coeficientes de un polinomio cúbico.



SOLUCIÓN Usamos las gráficas de la Figura 2 y las transformamos usando las técnicas de la Sección 2.5.

(a) La gráfica de $P(x) = -x^3$ es la reflexión de la gráfica de $y = x^3$ a través del eje x, como se ve en la Figura 3(a) siguiente.

(b) La gráfica de $Q(x) = (x - 2)^4$ es la gráfica de $y = x^4$ desplazada 2 unidades a la derecha, como se ve en la Figura 3(b).

(c) Empezamos con la gráfica de $y = x^5$. La gráfica de $y = -2x^5$ se obtiene alargando la gráfica verticalmente y reflejándola a través del eje x (vea la gráfica azul de trazos interrumpidos de la Figura 3(c)). Finalmente, la gráfica de $R(x) = -2x^5 + 4$ se obtiene al desplazar 4 unidades hacia arriba (vea la gráfica azul claro en la Figura 3(c)).

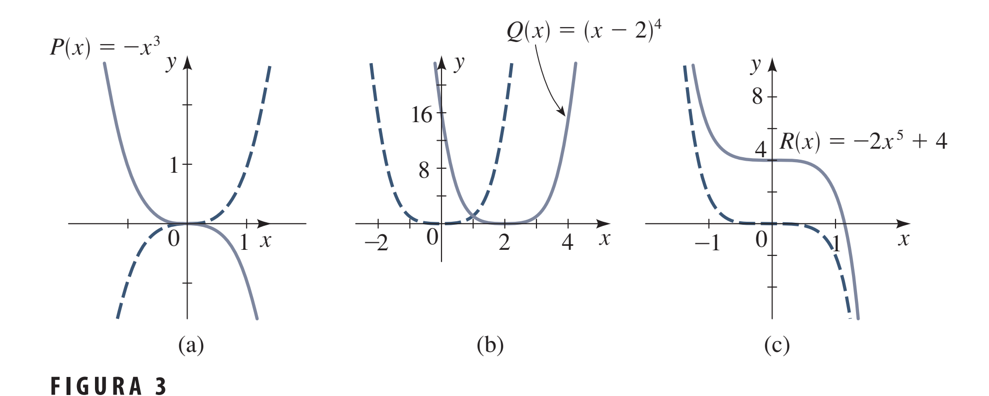


FIGURA 3

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **5** ■

▼ Comportamiento en los extremos y el término principal

El **comportamiento en los extremos** de una función polinomial es una descripción de lo que ocurre cuando x se hace grande en la dirección positiva o negativa. Para describir el comportamiento en los extremos, usamos la siguiente notación:

$x \to \infty$ significa "x se hace grande en la dirección positiva"

$x \to -\infty$ significa "x se hace grande en la dirección negativa"

Por ejemplo, el monomio $y = x^2$ en la Figura 2(b) tiene el siguiente comportamiento en los extremos:

$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

El monomio $y = x^3$ en la Figura 2(c) tiene el siguiente comportamiento en los extremos:

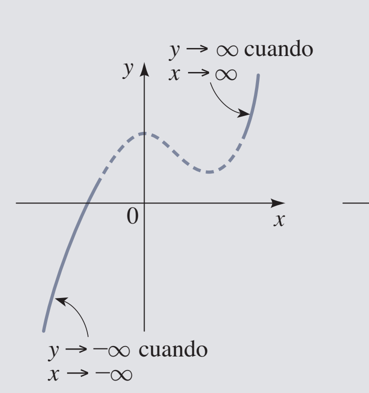
$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

Para cualquier función polinomial *el comportamiento en los extremos está determinado por el término que contiene la mayor potencia de x* porque, cuando x es grande, los otros términos son relativamente insignificantes en magnitud. El cuadro siguiente muestra los cuatro posibles tipos de comportamiento en los extremos, con base en la potencia superior y el signo de su coeficiente.

COMPORTAMIENTO EN LOS EXTREMOS DE POLINOMIOS

El comportamiento en los extremos de la función polinomial $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ está determinado por el grado n y el signo del coeficiente principal a_n, como se indica en las gráficas siguientes.

***P* tiene grado impar**



Coeficiente principal positivo

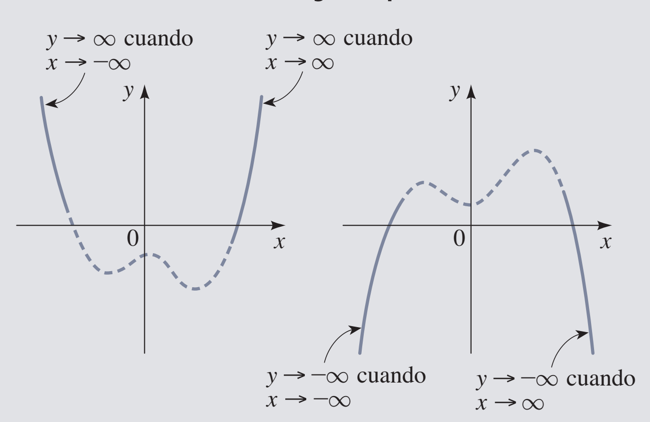
$y \to \infty$ cuando $x \to -\infty$

y 0 x

$y \to -\infty$ cuando $x \to \infty$

Coeficiente principal negativo

***P* tiene grado par**



Coeficiente principal positivo

Coeficiente principal negativo

EJEMPLO 2 | Comportamiento en los extremos de una función polinomial

Determine el comportamiento en los extremos de la función polinomial

$$P(x) = -2x^4 + 5x^3 + 4x - 7$$

SOLUCIÓN La función polinomial P tiene grado 4 y coeficiente principal -2. Por lo tanto, P tiene grado *par* y coeficiente principal *negativo*, de modo que tiene el siguiente comportamiento en los extremos:

$$y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

La gráfica de la Figura 4 ilustra el comportamiento en los extremos de P.

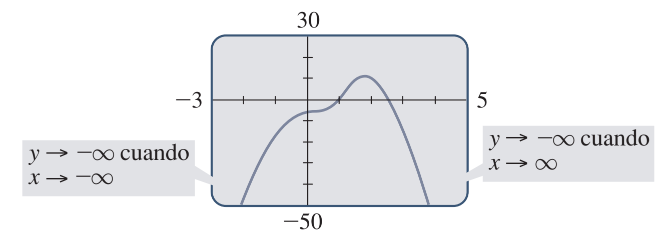


FIGURA 4
$P(x) = -2x^4 + 5x^3 + 4x - 7$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **11** ■

EJEMPLO 3 | Comportamiento en los extremos de una función polinomial

(a) Determine el comportamiento en los extremos de la función polinomial $P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x$.

(b) Confirme que P y su término principal $Q(x) = 3x^5$ tienen el mismo comportamiento en los extremos al graficarlos juntos.

SOLUCIÓN

(a) Como P tiene grado impar y coeficiente principal positivo, tiene el siguiente comportamiento en los extremos:

$$y \to \infty \quad \text{cuando} \quad x \to \infty \qquad \text{y} \qquad y \to -\infty \quad \text{cuando} \quad x \to -\infty$$

(b) La Figura 5 muestra las gráficas de P y Q en rectángulos de vista progresivamente más grandes. Cuanto más grande sea el rectángulo de vista más se asemejan las gráficas. Esto confirma que tienen el mismo comportamiento en los extremos.

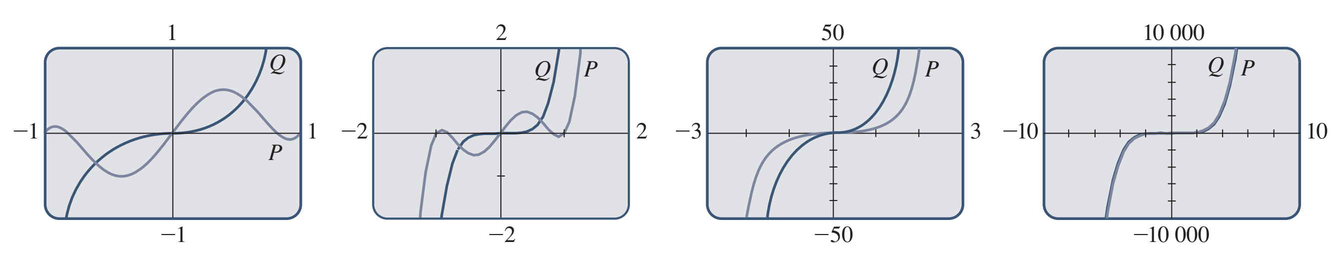


FIGURA 5
$P(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x$
$Q(x) = 3x^5$

AHORA INTENTE HACER EL EJERCICIO **41**

Para ver algebraicamente por qué P y Q del Ejemplo 3 tienen el mismo comportamiento en los extremos, factorice P como sigue y compárelo con Q.

$$P(x) = 3x^5\left(1 - \frac{5}{3x^2} + \frac{2}{3x^4}\right) \qquad Q(x) = 3x^5$$

Cuando x es grande, los términos $5/3x^2$ y $2/3x^4$ están cercanos a 0. Entonces, para x grande, tenemos

$$P(x) \approx 3x^5(1 - 0 - 0) = 3x^5 = Q(x)$$

Por lo tanto, cuando x es grande, P y Q tienen aproximadamente los mismos valores. También podemos ver esto numéricamente si hacemos una tabla como la siguiente.

x	$P(x)$	$Q(x)$
15	2 261 280	2 278 125
30	72 765 060	72 900 000
50	936 875 100	937 500 000

Si analizamos el caso cuando $x \to -\infty$, observaremos que el comportamiento de ambas funciones también coincide en este extremo.

Por el mismo razonamiento, podemos demostrar que el comportamiento en los extremos de *cualquier* función polinomial está determinado por su término principal.

▼ Uso de los ceros para graficar funciones polinomiales

Si P es una función polinomial, entonces c se denomina **cero** de P si $P(c) = 0$. En otras palabras, los ceros de P son las soluciones de la ecuación polinomial $P(x) = 0$. Observe que si $P(c) = 0$, entonces la gráfica de P tiene un punto de intersección con el eje x en $x = c$, de modo que los puntos de intersección con el eje x de la gráfica son los ceros de la función.

CEROS REALES DE FUNCIONES POLINOMIALES

Si P es un polinomio y c es un número real, entonces los siguientes son equivalentes:

1. c es un cero de P.
2. $x = c$ es una solución de la ecuación $P(x) = 0$.
3. $x - c$ es un factor de $P(x)$.
4. c es un punto de intersección con el eje x de la gráfica de P.

Para hallar los ceros de un polinomio P, factorizamos y usamos la Propiedad del Producto Cero (vea página 47). Por ejemplo, para hallar los ceros de $P(x) = x^2 + x - 6$, factorizamos P para obtener

$$P(x) = (x - 2)(x + 3)$$

Desde esta forma factorizada podemos ver fácilmente que

1. 2 es un cero de P.
2. $x = 2$ es una solución de la ecuación $x^2 + x - 6 = 0$.
3. $x - 2$ es un factor de $x^2 + x - 6$.
4. 2 es un punto de intersección en x de la gráfica de P.

Los mismos datos son verdaderos para el otro cero, -3.

El siguiente teorema tiene numerosas e importantes consecuencias. (Vea, por ejemplo, el *Proyecto de descubrimiento*). Aquí lo usamos para ayudarnos a graficar funciones polinomiales.

TEOREMA DEL VALOR INTERMEDIO PARA FUNCIONES POLINOMIALES

Si P es una función polinomial y $P(a)$ y $P(a)$ tienen signos contrarios, entonces existe al menos un valor de c entre a y b para el cual $P(c) = 0$.

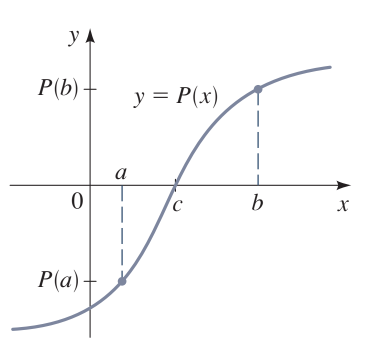


FIGURA 6

No demostraremos este teorema, pero la Figura 6 muestra por qué es intuitivamente plausible.

Una consecuencia importante de este teorema es que, entre cualesquier dos ceros sucesivos, los valores de una función polinomial son todos positivos o todos negativos. Esto es, entre dos ceros sucesivos la gráfica de un polinomio se encuentra *enteramente arriba* o *enteramente abajo* del eje x. Para ver por qué, suponga que c_1 y c_2 son ceros sucesivos de P. Si P tiene valores positivos y negativos entre c_1 y c_2, entonces por el Teorema del Valor Intermedio, P debe tener otro cero entre c_1 y c_2. Pero eso no es posible porque c_1 y c_2 son ceros sucesivos. Esta observación nos permite usar las siguientes guías para graficar funciones polinomiales.

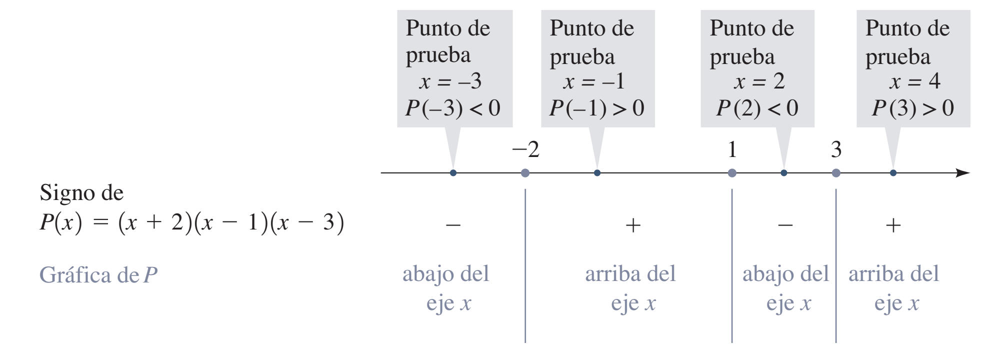
GUÍAS PARA GRAFICAR FUNCIONES POLINOMIALES

1. **Ceros.** Factorizar la función polinomial para hallar todos sus ceros reales; estos son los puntos de intersección con el eje x de la gráfica.
2. **Puntos de prueba.** Hacer una tabla de valores para la función polinomial. Incluir puntos de prueba para determinar si la gráfica del polinomio se encuentra arriba o abajo del eje x sobre los intervalos determinados por los ceros. Incluir el punto de intersección en y en la tabla.
3. **Comportamiento en los extremos.** Determinar el comportamiento en los extremos del polinomio.
4. **Graficar.** Localizar los puntos de intersección y otros puntos que se encuentren en la tabla. Trazar una curva sin irregularidades que pase por estos puntos y exhibir el comportamiento en los extremos.

EJEMPLO 4 | Usar los ceros para graficar una función polinomial

Trace la gráfica de la función polinomial $P(x) = (x + 2)(x - 1)(x - 3)$.

SOLUCIÓN Los ceros son $x = -2$, 1 y 3. Estos determinan los intervalos $(-\infty, -2)$, $(-2, 1)$, $(1, 3)$ y $(3, \infty)$. Usando puntos de prueba en estos intervalos, obtenemos la información en el siguiente diagrama de signos.





Este libro de texto ha sido escrito para usted como guía de estudio detallado y sistemático de las Matemáticas que se identifican como Precálculo. Para estudiar Cálculo, un estudiante no sólo debe adquirir conocimientos técnicos: también debe tener una clara *comprensión de los conceptos*. La comprensión de los conceptos y los conocimientos técnicos van de la mano y se complementan entre sí. Pero también es necesario resaltar la importancia de las aplicaciones del *Cálculo* a situaciones reales, por lo que en todos los temas de este texto se resalta la relevancia del modelado como objetivo a alcanzar.

Esta versión abreviada de *Precálculo. Matemáticas para el cálculo*, sexta edición, se dedica a proporcionar las herramientas matemáticas que permiten abordar el Cálculo de una variable. La organización temática está basada en el texto original *Precalculus. Mathematics for Cálculus. Sixth Edition. Stewart, James, Lothar Redlin and Saleem Watson*. Esta versión respeta el orden de los capítulos originales, pero se omitieron los de Coordenadas polares y ecuaciones paramétricas, Vectores en dos y tres dimensiones, Sistemas de ecuaciones lineales y desigualdades, y Límites: una mirada previa al cálculo. Sin embargo, debido a su carácter de prerrequisito, algunas secciones de esos capítulos se incluyeron en este libro.

El propósito de reorganizar la temática original es la de disponer de un material de Precálculo de menor volumen. Sin embargo, en todo momento se respeta el espíritu de los autores en relación con lo que ellos consideran que es el Precálculo, cómo debe abordarse y qué contenidos son esenciales. La versión abreviada respeta la filosofía e intencionalidad de los autores que se exhiben en el trabajo original.



Visite nuestro sitio en http://latinoamerica.cengage.com

